

# Controle $\mathcal{H}_\infty$

Prof. Tiago Dezuó

## 1 Norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas

Considere o seguinte sistema nominal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_w w \\ z &= C_z x + D_w w\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada de perturbações,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  as saídas de interesse, e  $A$ ,  $B_w$ ,  $C_z$ ,  $D_w$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas. Suponha, sem perda de generalidade, que  $x(0) = 0$ . Este sistema pode ser representado no domínio da frequência pela seguinte matriz de transferência:

$$H_{wz}(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w + D_w.\tag{2}$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (1) é definida como o maior ganho da sua resposta em frequência<sup>1</sup>. Antes de apresentar a definição geral de norma  $\mathcal{H}_\infty$ , considera-se o caso de sistemas SISO onde a entrada  $w$ , a saída  $z$  e a função de transferência  $H_{wz}(s)$  indicados na Figura 1 são escalares.

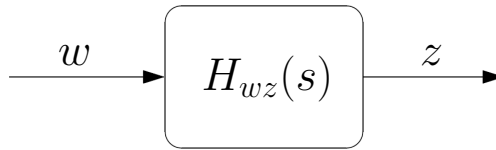


Figura 1: Relação entrada-saída.

A Figura 2 mostra a resposta em frequência deste sistema, onde  $M_r$  representa o pico de ressonância e  $\omega_r$  é a frequência de ressonância.

Note que o pico de ressonância é o maior ganho que o sistema é capaz de oferecer ao sinal de entrada. Desta forma, para o caso de sistemas SISO, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser descrita como

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \max_{\omega} |H_{wz}(j\omega)| = M_r.\tag{3}$$

---

<sup>1</sup>A resposta em frequência de um sistema linear invariante estável caracteriza a resposta e regime permanente para excitações senoidais de diversas frequências. Em resumo, para uma excitação  $w(t) = A \sin(\omega_0 t)$  a resposta em regime permanente do sistema  $Z(s) = H(s)W(s)$  é  $z(t) = B \sin(\omega_0 t + \phi)$  onde  $B = A |H(j\omega_0)|$  e  $\phi = \angle H(j\omega_0)$ .

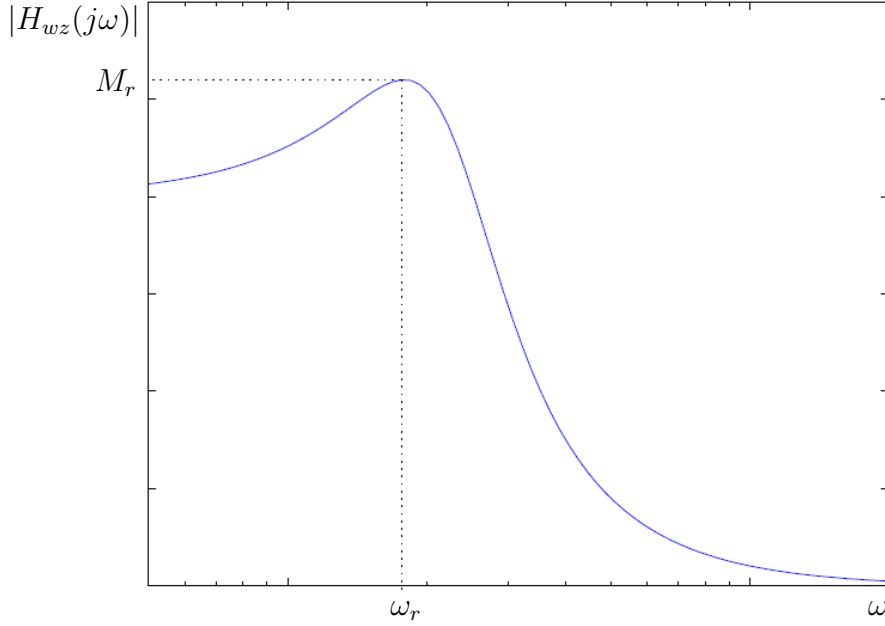


Figura 2: Diagrama de Bode.

No caso de sistemas MIMO a ideia de módulo não se aplica e deve ser substituída pela norma espectral da matriz de transferência<sup>2</sup>. Assim, um diagrama de Bode similar ao da Figura 2 pode ser obtido para a função  $\|H_{wz}(j\omega)\| = \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\}$  e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema corresponde ao pico de ressonância dessa função dando origem à definição

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\}. \quad (4)$$

Note que se  $H_{wz}(j\omega)$  for uma função escalar então  $\sigma\{H_{wz}(j\omega)\} = |H_{wz}(j\omega)|$ , retornando à expressão (3) para o caso de sistemas SISO.

Como já foi salientado, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema representa o maior ganho da sua resposta em frequência e pode também ser vista como o maior ganho em termos de energia que o sistema pode oferecer a um sinal de entrada [2]. Esta interpretação é bastante útil e fornece uma definição alternativa para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Pelo teorema de Parseval temos

$$\|w(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega \quad , \quad \|z(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Z(j\omega)^* Z(j\omega) d\omega \quad (5)$$

onde  $W(j\omega)$ ,  $Z(j\omega)$  são as transformadas de Fourier dos sinais  $w(t)$ ,  $z(t)$ . Como  $Z(j\omega) =$

<sup>2</sup>A norma espectral é a norma de matrizes induzida pela norma Euclidiana de vetores, i.e. para vetores  $y$ ,  $w$  e uma matriz  $M$  satisfazendo  $y = Mw$  temos  $\|y\| = \|Mw\| \leq \|M\|\|w\|$ . Ela é definida como sendo  $\|M\| = \bar{\sigma}\{M\}$  onde  $\bar{\sigma}\{M\}$  denota o valor singular máximo de  $M$ . Os valores singulares ( $\sigma$ ) de uma matriz  $M$  são definidos como sendo a raiz quadrada dos autovalores de  $M^*M$ , i.e.  $\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(M^*M)}$  onde  $M^*$  é a matriz complexa conjugada transposta de  $M$ . Note que os valores singulares são reais e não negativos.

$H_{wz}(j\omega)W(j\omega)$ , temos

$$\begin{aligned}\|z(t)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(j\omega)^* H_{wz}(j\omega)^* H_{wz}(j\omega) W(j\omega) d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\})^2 W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega \\ &\leq \left( \sup_\omega \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega.\end{aligned}\tag{6}$$

Esta última expressão pode ser reescrita na forma

$$\|z(t)\|_2 \leq \|H_{wz}(s)\|_\infty \|w(t)\|_2\tag{7}$$

onde se nota que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema pode também ser vista como o maior ganho em termos de energia que o sistema pode oferecer a um sinal de entrada. Se escolhermos o sinal de entrada  $W(j\omega)$  adequadamente<sup>3</sup> podemos ter a igualdade  $\|z(t)\|_2 = \|H_{wz}(s)\|_\infty \|w(t)\|_2$ . Para isso basta escolher  $w(t) = V_0 \sin(\omega_0 t) G_T(t)$  onde  $V_0$  é o autovetor de  $H_{wz}(j\omega_0)^* H_{wz}(j\omega_0)$  correspondente ao seu maior autovalor,  $\omega_0$  é a frequência onde ocorre o  $\sup_\omega \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\}$  e  $G_T(t)$  é a função porta<sup>4</sup> que define o truncamento do sinal para  $T$  suficientemente grande (veja nota de rodapé). Os elementos do vetor  $V_0$  são as amplitudes das senoides de cada componente do vetor  $w(t)$ . Um valor negativo de uma das componentes de  $V_0$  indica uma defasagem de 180 graus dado que  $-\sin(\omega t) = \sin(\omega t + \pi)$ .

A partir dessa relação pode-se definir a versão no domínio do tempo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  como

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}.\tag{8}$$

## 2 Determinação da Norma $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótima

Uma das maneiras de determinar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema nominal é através da sua resposta em frequência. Para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO) pode-se utilizar o diagrama de Bode para obter o ganho máximo do sistema com relação a todas as frequências. Entretanto, o conceito de resposta em frequência para sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO) é mais complexo e pode ser obtido através da noção da decomposição pelo valor singular [2, 3].

Ao invés de determinar o valor exato da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , uma ideia bastante comum consiste em se determinar numericamente um limitante superior  $\gamma$  para  $\|H_{wz}(s)\|_\infty$  utilizando a definição (8). Em outras palavras, busca-se um escalar positivo tal que

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty < \gamma.\tag{9}$$

---

<sup>3</sup>Note que sinais de entrada persistentes do tipo degrau ou senoides não possuem energia finita e portanto para eles não podemos calcular  $\|w(t)\|_2$ , nem tampouco a norma da resposta do sistema  $\|z(t)\|_2$ . Para obter a resposta em frequência com sinais de energia finita basta considerar senoides truncadas num instante de tempo suficientemente grande de tal forma que o regime estacionário da resposta seja atingido com a precisão desejada.

<sup>4</sup>A função porta  $G_T(t)$  é definida como  $G_T(t) = 1$  para  $|t| < T$  e zero caso contrário.

O problema de encontrar o limitante acima é conhecido como problema  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo. Para encontrar o valor exato da norma basta minimizar  $\gamma$  de forma iterativa. Este problema pode ser resolvido de diversas maneiras, como por exemplo pela equação de Riccati [3, Cap.12], pela matriz Hamiltoniana [2] ou por LMIs [1].

### 3 Determinação da Norma $\mathcal{H}_\infty$ via LMI

Primeiro observe que a condição desejada

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \sup_{w \neq 0} \sqrt{\frac{\int_0^\infty z(t)'z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)'w(t) dt}} < \gamma \quad (10)$$

pode ser reescrita na forma

$$\int_0^\infty z(t)'z(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w(t)'w(t) dt. \quad (11)$$

Como o sistema é exponencialmente estável, i.e.  $x(\infty) = 0$  e as condições iniciais são nulas, i.e.  $x(0) = 0$ , considere o problema de determinar uma função  $V(x) = x(t)'Px(t)$ , onde  $P$  é uma matriz simétrica positiva definida, tal que

$$\dot{V}(x) + z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) < 0, \quad (12)$$

onde  $\dot{V}(x)$  é a derivada de  $V(x)$  para as trajetórias do sistema. Observe que se encontramos  $V(x)$  que satisfaça a condição anterior então teremos (11) e portanto (10) satisfeitas. Para recuperar (11) basta integrar (12) no intervalo  $t \in (0, T)$  com  $T \rightarrow \infty$ . O interesse da condição anterior é que podemos expressá-la como uma LMI. Para isso basta notar que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + z(t)'z(t) - \gamma^2 w(t)'w(t) = \\ \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C_z' C_z & PB_w + C_z' D_w \\ B_w' P + D_w' C_z & -\gamma^2 I_{n_w} + D_w' D_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

o que nos leva à LMI

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C_z' C_z & PB_w + C_z' D_w \\ B_w' P + D_w' C_z & -\gamma^2 I_{n_w} + D_w' D_w \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

Este resultado, conhecido como “*Bounded Real Lemma*”, é na realidade uma condição necessária e suficiente para (10) [1]. Isso implica que o valor exato da norma pode ser obtido, com a precisão desejada, através do problema de otimização convexa a seguir.

$$\min_P \gamma^2 : \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A'P + PA + C_z' C_z & PB_w + C_z' D_w \\ B_w' P + D_w' C_z & -\gamma^2 I_{n_w} + D_w' D_w \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

**Exemplo 1.** Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} w\end{aligned}\tag{16}$$

onde  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}'$ . O valor exato da norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser obtido diretamente do diagrama de Bode, de onde conclui-se que  $\|H_{wz}(s)\|_\infty = 1.00$  (na frequência  $\omega = 0$ ).

Alternativamente, pode-se obter uma estimativa da norma  $\mathcal{H}_\infty$  através do problema de otimização definido em (15). Resolvendo, obtém-se  $\gamma = 1.00$ . ■

## 4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  representa o maior ganho que o sistema oferece para um dado sinal perturbação, qualquer que seja ele. Deste forma, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser visto como um problema de otimização no qual deseja-se determinar uma lei de controle  $u(t)$  que minimiza o maior ganho que o sistema em malha fechada vai oferecer a um sinal perturbação qualquer.

Nesta seção apresenta-se uma formulação LMI para o problema de controle acima através de realimentação de estados. Para tal, considere o sistema linear

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + B_w w \\ z &= C_z x + D_z u + D_w w \\ u &= Kx\end{aligned}\tag{17}$$

onde  $D_w$  é uma matriz constante com dimensões apropriadas.

Em malha fechada o sistema acima fica

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + B_w w \\ z &= (C_z + D_z K)x + D_w w\end{aligned}\tag{18}$$

Utilizando os resultados apresentados anteriormente para o sistema acima e a mudança de variável  $Y = KQ$  a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (17) é dada pelo seguinte problema de otimização:

$$\min_{Q, Y} \gamma : \begin{cases} Q > 0 \\ \begin{bmatrix} AQ + QA' + BY + Y'B' & B_w & QC'_z + Y'D'_z \\ B'_w & -\gamma I_{n_z} & D'_w \\ C_z Q + D_z Y & D_w & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \end{cases}\tag{19}$$

Este resultado é resumido no seguinte teorema.

**Teorema 1.** Considere o sistema linear em (17). Suponha que as matrizes  $Q = Q'$  e  $Y$  de dimensões apropriadas e o escalar positivo  $\gamma$  sejam a solução do problema de otimização definido em (19). Então o sistema (17) com  $K = YQ^{-1}$  é assintoticamente estável e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada satisfaz  $\|H_{wz}\|_\infty \leq \sqrt{\gamma}$ . ■

**Exemplo 2.** Considere o seguinte sistema linear instável em malha aberta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + u + 0.1w\end{aligned}\tag{20}$$

Para o sistema acima deseja-se projetar uma lei de controle  $u = Kx$  tal que o sistema seja estável em malha fechada e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  seja minimizada. Aplicando o Teorema 1, obtém-se o ganho  $K$ . Simular a saída de desempenho  $z(t)$  para um sinal de perturbação na forma:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1s \\ 0, & t > 1s \end{cases}\tag{21}$$

e o diagrama de Bode para o sistema em malha fechada. ■

## Referências

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 86. SIAM, Philadelphia, USA, December 1994.
- [2] J. B. Burl. *Linear Optimal Control:  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Methods*. Addison Wesley Longman, 1999.
- [3] K. Zhou. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.