Controle LQG

Prof. Tiago Dezuo

O controlador LQG é uma combinação do controlador LQR, que minimiza um critério quadrático, e de um observador particular, chamado de Filtro de Kalman, que é projetado para minimizar a variância do erro de estimação.

O sistema agora será descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de medidas contaminado pelo ruído $v \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle a ser determinado, $w \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de perturbação, A, B, C são matrizes dadas que definem o modelo do sistema. O ruído de medida $v(t)$ e a perturbação $w(t)$ serão considerados como variáveis estocásticas para as quais se conhece apenas a média e a variância.

1 Revisão de sistemas estocásticos

Nesta seção apresentamos um resumo sobre os principais tópicos relacionados à caracterização de variáveis estocásticas.

O termo variável estocástica pode ser interpretado como uma generalização do conceito de variável aleatória. Enquanto um processo estocástico gera resultados que são funções do tempo, que representamos por uma variável estocástica, um processo aleatório gera resultados que são números, representados por uma variável aleatória. Por exemplo, verificar o resultado num jogo de dados é um processo aleatório enquanto o processo de efetuar a medição de um sinal em cada realização de um certo experimento é estocástico. O sistema (1) é estocástico, pois para cada experimento com ele obtemos como resultado um sinal de saída medido $y(t)$.

As estatísticas de uma variável estocástica, como a média e variância por exemplo, são definidas a partir da função densidade de probabilidade (FDP) que representa estatisticamente o comportamento dessa variável.

A FDP representa a probabilidade da variável se encontrar num certo intervalo num dado instante, isto é, se $F_{dp}(\cdot)$ é a FDP de uma certa variável então

$$F_{dp}(x_1, t_1)\Delta x_1 = \text{prob}\left[x_1 < x(t_1) < x_1 + \Delta x_1\right]. \tag{2}$$

Por exemplo, se compararmos a FDP à densidade de um certo líquido, a probabilidade seria a distribuição da massa desse líquido no volume em questão.

Na maior parte dos casos as variáveis estocásticas são caracterizadas pelas estatísticas de 1ª e 2ª ordem. As estatísticas de primeira ordem são indicativos dos desvios que esta variável pode sofrer num instante genérico de tempo ao longo das possíveis realizações da variável. As mais comuns são a média, a média quadrática e a variância, definidas na Tabela 1 para o caso escalar. Observe que $\sigma^2(t) = \mathbf{E}\left\{(x-\mu)^2\right\} = \mathbf{E}\left\{(x^2-2x\mu+\mu^2)^2\right\} = \mathbf{E}\left\{x^2\right\} - \mu^2$.

Tabela 1: Estatísticas comuns.

Primeira ordem	
Média	$\mu(t) = \mathbf{E}\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \ F_{dp}(x,t) \ dx$
Média quadrática	$\mathbf{E}\left\{x(t)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ F_{dp}(x,t) \ dx$
Variância	$\sigma^2(t) = \mathbf{E}\left\{(x-\mu)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \ F_{dp}(x,t) \ dx$
Segunda ordem	
Correlação	$\rho(t,\tau) = \mathbf{E}\left\{x(t)x(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \ F_{dp}(x_1,x_2,t,\tau) \ dx_1 \ dx_2$

As estatísticas de segunda ordem dizem respeito ao valor da variável em dois instantes de tempo distintos ao longo das possíveis realizações da variável. A mais comum é a correlação, definida na Tabela 1 também para o caso escalar.

O símbolo $\mathbf{E}\left\{\cdot\right\}$ representa a esperança matemática do sinal $\{\cdot\}$ e significa o valor médio de $\{\cdot\}$ calculado no sentido probabilístico que é diferente do valor médio determinístico dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \ dt. \tag{3}$$

Apesar da dupla integral que define a função de correlação, esta se reduz à média quadrática quando $t=\tau$. Isto pode ser verificado da seguinte forma. Com $t=\tau$ temos

$$\rho(t,t) = \mathbf{E}\left\{x(t)x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \ F_{dp}(x_1,x_2,t,t) \ dx_1 \ dx_2. \tag{4}$$

Porém,

$$F_{dp}(x_1,x_2,t,t) \ dx_1 \ dx_2 = \text{prob}\left[x_1 < x(t) < x_1 + dx_1, \ x_2 < x(t) < x_2 + dx_2\right] \tag{5}$$

e como $x(t)$ não pode estar nos intervalos $x_1 < x(t) < x_1 + dx_1$ e $x_2 < x(t) < x_2 + dx_2$ no mesmo instante a menos que $x_1 = x_2$, temos

$$F_{dp}(x_1,x_2,t,t) \ dx_1 \ dx_2 = F_{dp}(x_1,t)\delta(x_1-x_2) \ dx_1 \ dx_2, \tag{6}$$

onde $\delta(x_1-x_2)$ denota um impulso para $x_1 - x_2 = 0$. Substituindo a expressão acima em (4) e integrando para o impulso, temos o resultado desejado

$$\rho(t,t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \ F_{dp}(x_1,t) \ dx_1 = \mathbf{E}\left\{x(t)^2\right\}. \tag{7}$$

Como a FDP dificilmente é conhecida na prática, as estatísticas exatas definidas através do operador $\mathbf{E}\{\cdot\}$ possuem interesse apenas teórico. Do ponto de vista prático podemos obter aproximações das estatísticas do sinal através das suas amostras dando origem às estatísticas empíricas indicadas na Tabela 2.

Tabela 2: Estatísticas empíricas.

Média	$\overline{x}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$
Média quadrática	$\overline{x^2}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2(t)$
Variância	$v(t) = \overline{x^2}(t) - (\overline{x}(t))^2$
Correlação	$r(t,\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)x_i(\tau)$

Observe que nas definições empíricas da Tabela 2 a correlação para $t = \tau$ coincide com a média quadrática e quando a média é nula a variância coincide com a média quadrática.

Para um sinal vetorial na forma

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

a média é dada por

$$\mathbf{E}\{x(t)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\{x_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathbf{E}\{x_n(t)\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{9}$$

e a correlação é uma matriz simétrica dada por

$$R(t,\tau) = \mathbf{E}\{x(t)x(\tau)'\} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\{x_1(t)x_1(\tau)\} & \cdots & \mathbf{E}\{x_1(t)x_n(\tau)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}\{x_n(t)x_1(\tau)\} & \cdots & \mathbf{E}\{x_n(t)x_n(\tau)\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Os elementos da diagonal $\mathbf{E}\{x_i(t)x_i(\tau)\}$ são as funções de auto-correlação dos sinais $x_i(t)$. Os elementos fora da diagonal $\mathbf{E}\{x_i(t)x_j(\tau)\}$ são as funções de correlação cruzada.

Um caso especial importante ocorre quando $t = \tau$. A matriz $R(t,t)$ é chamada de matriz de covariância do sinal e é positiva definida (ou semi-definida). Observe que se $x(t)$ possui média nula, então sua variância, definida por $\mathbf{E}\{x(t)'x(t)\}$, pode ser obtida através do traço da matriz de covariância $R(t,t)$ da seguinte forma

$$\mathbf{E}\{x(t)'x(t)\} = \mathbf{E}\{\text{traço}\{x(t)x(t)'\}\} = \text{traço}\{\mathbf{E}\{x(t)x(t)'\}\} = \text{traço}\{R(t,t)\}. \tag{11}$$

Quando $\mathbf{E}\{x_i(t)x_j(\tau)\}$ é nula dizemos que os sinais $x_i(t)$ e $x_j(t)$ são não-correlacionados. Observe que isto não implica que eles sejam estatisticamente independentes. Para que isto ocorra, a FDP conjunta de $x_i(t)$ e $x_j(t)$ deve ser o produto das FDP individuais.

Um processo que dá origem a uma variável estocástica onde sua FDP satisfaz a relação

$$F_{dp}(x, t+\tau) = F_{dp}(x, t) \ , \ \forall \tau \tag{12}$$

é chamado processo estacionário indicando que as estatísticas não se alteram com deslocamentos no tempo.

Quando as estatísticas tomadas sobre o conjunto dos resultados dos experimentos coincidem com as estatísticas temporais de cada experimento, dizemos que o processo que gera esses resultados é ergódico. Observe que um processo ergódico precisa ser estacionário. Num processo ergódico, o resultado de um único experimento é representativo de todos os resultados possíveis de serem obtidos. Assim, num processo ergódico temos as estatísticas apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3: Estatísticas de processos ergódicos.

Média	$\mu(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ dt$
Variância	$\sigma^2(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t)-\mu(t))^2\ dt$
Correlação	$\rho(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)\ dt$

Uma variável estocástica $w(t)$ é chamada de ruído branco se ela possuir média nula ($\mathbf{E}\{w(t)\} = 0$) e se sua matriz de correlação for dada por

$$R(\tau) = W\delta(\tau) = \mathbf{E}\{w(t)w(t+\tau)'\}, \tag{13}$$

onde $W > 0$ (ou $W \geq 0$) é a matriz de covariância do ruído e $\delta(\tau)$ é um impulso unitário na origem. Daí vemos que um ruído branco é um sinal não correlacionado no tempo pois $\delta(\tau) = 0$ para $\tau \neq 0$. Além disso, a transformada de Fourier da função de correlação[1] de um ruído branco é uma constante dada pela matriz W. Por ter uma função de correlação expressa através de um impulso, o ruído branco é um sinal que não existe no mundo real. Porém, devido às suas propriedades, ele tem um papel fundamental na análise de sinais que é comparado ao papel do impulso na teoria de sistemas lineares.

[1]A transformada de Fourier da função de correlação é conhecida em tratamento de sinais como espectro de potência do sinal, pois o módulo da transformada numa certa frequência indica a potência do sinal nessa frequência.

Note que a resposta de um sistema linear invariante estável a um ruído branco também é um sinal de média nula[2]. Para verificar isso, seja $\phi(t)$ a matriz de transição de estados de um sistema linear invariante causal. Assim, sua resposta a um sinal $w(t)$ com $w(t) = 0$, $\forall t < 0$ é

$$y(t) = \int_0^t \phi(t-\tau)w(\tau)\ d\tau \tag{14}$$

de onde obtemos[3]

$$\mathbf{E}\left\{y(t)\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^t \phi(t-\tau)w(\tau)\ d\tau\right\} = \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{E}\left\{w(\tau)\right\}\ d\tau. \tag{15}$$

Logo, se $\mathbf{E}\left\{w(t)\right\} = 0$ temos $\mathbf{E}\left\{y(t)\right\} = 0$.

2 Controlador LQG

Agora estamos em condições de formular e resolver o problema de controle LQG. Em relação ao sistema (1) assumiremos:

- $w(t)$, $v(t)$ são ruídos brancos, isto é, variáveis estocásticas de média nula ($\mathbf{E}\left\{w(t)\right\} = 0$, $\mathbf{E}\left\{v(t)\right\} = 0$) e não correlacionadas no tempo:

$$\mathbf{E}\left\{w(t)w(\tau)'\right\} = 0 \quad , \quad \mathbf{E}\left\{v(t)v(\tau)'\right\} = 0 \quad , \quad \text{para } t \neq \tau \tag{16}$$

- $w(t)$, $v(t)$ são não correlacionadas entre si:

$$\mathbf{E}\left\{w(t)v(t)'\right\} = 0 \tag{17}$$

- $w(t)$, $v(t)$ possuem matrizes de covariância conhecidas:

$$\mathbf{E}\left\{w(t)w(t)'\right\} = Q_w \geq 0 \quad , \quad \mathbf{E}\left\{v(t)v(t)'\right\} = R_v > 0 \tag{18}$$

Problema. *Encontre uma lei de controle* $u(t)$ *que, ao ser aplicada no sistema* (1)*, minimiza a função custo*

$$J = \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\left\{\int_0^T (x'Qx + u'Ru)\ dt\right\} \tag{19}$$

onde $Q \geq 0$*,* $R > 0$ *são matrizes de ponderação dadas, como no problema LQR.* ■

A solução desse problema pode ser apresentada em duas etapas, de forma similar ao "Princípio da Separação" já estudado no controle de sistemas com observadores. O princípio da separação é um resultado que nos permite encontrar a solução ótima do problema de controle acima através da solução ótima de dois sub-problemas: o primeiro corresponde a um problema de controle LQR já estudado e o segundo corresponde a um problema de

[2] Na realidade, a saída terá média nula para qualquer sinal de entrada de média nula.

[3] Note que a esperança matemática $\mathbf{E}\left\{\cdot\right\}$ é tomada em relação às possíveis realizações de $w(t)$ e $\phi(t-\tau)$ é a mesma para todas as realizações. Logo, $\mathbf{E}\left\{\phi(t-\tau)w(\tau)\right\} = \phi(t-\tau)\mathbf{E}\left\{w(\tau)\right\}$.

projeto de um observador onde a variância do erro de estimação deve ser minimizada. O observador que possui variância mínima do erro de estimação é conhecido como filtro de Kalman.

Assim, a solução do problema de controle LQG é encontrada adotando-se o seguinte procedimento.

Primeiro, obtenha a estimativa x_f ótima do estado x, onde ótima significa que a variância do erro de estimação $\mathbf{E}\{(x - x_f)(x - x_f)'\}$ é minimizada.

Em seguida, use x_f como se fosse o estado verdadeiro e aplique a lei de controle $u = -Kx_f$, onde K é a solução de um problema de controle LQR que veremos a seguir. Observe portanto que a solução do problema de controle LQG resulta também em um controlador baseado em observador.

O Filtro de Kalman é um observador de estados do tipo Luenberger

$$\dot{x}_f(t) = (A - LC)x_f(t) + Bu(t) + Ly(t) \tag{20}$$

onde o ganho L do observador é projetado para minimizar a variância do erro de estimação $\mathbf{E}\{e'e\}$, e é dado pelas equações a seguir.

$$L = SC'R_v^{-1} \quad , \quad SA' + AS - SC'R_v^{-1}CS + Q_w = 0 \tag{21}$$

A equação acima, que é quadrática na matriz S, é conhecida como equação de Riccati. Ela possui solução S positiva definida se o par (A, C) é observável e o par (A, B_c) é controlável, onde B_c é qualquer matriz que satisfaz a decomposição $Q_w = B_c B_c'$.

A segunda parte do problema de controle LQG consiste em se resolver um problema LQR. Nesse caso, procuramos uma lei de controle $u = -Kx$ que minimiza a função custo

$$\int_0^\infty (x'Qx + u'Ru)\; dt \tag{22}$$

para as trajetórias do sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ (observe que agora $w(t) = 0$ e $v(t) = 0$). O ganho ótimo do LQR é dado por:

$$K = R^{-1}B'P \quad , \quad A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0. \tag{23}$$

A equação de Riccati acima possui solução P positiva definida se o par (A, B) é controlável e o par (A, C_o) é observável, onde $Q = C_o'C_o$.

Finalmente, a solução do LQG é $u = -Kx_f$ que resulta no seguinte sistema de malha fechada:

$$\begin{array}{rl} \dot{x} = Ax + Bu + w & \\ \dot{x}_f = (A - LC)x_f + Bu + Ly \end{array} \; , \; \begin{array}{l} u = -Kx_f \\ y = Cx + v \end{array} \tag{24}$$

que pode ser representado pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ w - Lv \end{bmatrix}, \tag{25}$$

onde $e = x - x_f$ é o erro de estimação de estados. Observe que as equações acima são idênticas às obtidas para a estrutura de controle via estados observados estudada anteriormente, e de forma análoga podemos notar que os autovalores da malha fechada são os autovalores das matrizes $(A - BK)$ e $(A - LC)$ que são dados por:

$$\det(sI - (A - BK)) \cdot \det(sI - (A - LC)) = 0 \tag{26}$$

Para verificar a estabilidade do sistema em malha fechada vamos reescrever as equações (21) e (23) na forma

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + K'RK + Q = 0 \tag{27}$$
$$(A - LC)S + S(A - LC)' + LR_vL' + Q_w = 0 \tag{28}$$

Comparando as expressões acima com a equação de Lyapunov percebemos que os autovalores das matrizes $(A - BK)$ e $(A - LC)$ estão no semi-plano esquerdo se as matrizes P, S são positivas definidas. Isto ocorre quando:

- O par (A, C) é observável e o par (A, B_c) é controlável, para $Q_w = B_cB_c'$.
- O par (A, C_o) é observável, para $Q = C_o'C_o$, e o par (A, B) é controlável.

Se as condições acima não se verificam, porém os modos não controláveis e não observáveis são estáveis, o sistema em malha fechada ainda é estável. Nessas condições teremos $P \geq 0$ e/ou $S \geq 0$.

O LQR possui propriedades de robustez interessantes. Escolhendo $R = rI$, mostra-se que o controle LQR possui pelo menos 60° de margem de fase em cada canal de controle, margem de ganho infinita em cada canal e admite uma redução de até 6dB simultaneamente em todos os canais. Já o Filtro de Kalman não possui nenhuma garantia de robustez e o LQG, que combina os dois (LQR e filtro) também não possui garantia de robustez.