Controle LQR

Prof. Tiago Dezuo

Os métodos de projeto estudados nos módulos anteriores estão baseados na localização dos polos que é fixada pelo projetista. Em muitos casos no entanto o desempenho da resposta do sistema é fortemente degradado pela presença de zeros na função de transferência. Nesses casos uma escolha adequada dos polos de malha fechada não é trivial. O método que veremos nesta seção ficou conhecido na literatura "regulador linear-quadrático" (LQR), pois ao invés de utilizar a localização dos polos como critério de projeto, o LQR está baseado na minimização de um critério quadrático que está associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle a serem projetados.

A energia de um sinal escalar $s(t) \; : \; [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ é definida por

$$\int_0^\infty s(t)^2 \; dt \tag{1}$$

Se $s(t)$ é a tensão aplicada num resistor unitário, a integral acima expressa a energia dissipada nesse resistor por esse sinal. Defini-se $\mathcal{L}_2$ o espaço dos sinais que possuem energia finita.

A energia de um sinal vetorial $x(t) \; : \; [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ é definida por

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i(t)^2 \; dt = \int_0^\infty x(t)' x(t) \; dt \tag{2}$$

e corresponde à soma das energias de todas as componentes do sinal[1]. Assim, quanto maior a amplitude e duração do sinal no tempo, maior será sua energia.

1 Cálculo da energia por Lyapunov

Considere um sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad , \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de variáveis do sistema cuja energia queremos calcular. Para esse fim, vamos assumir que o sistema é exponencialmente estável, caso contrário a energia seria infinita.

Considere a equação de Lyapunov

$$A'P + PA + C'C = 0 \tag{4}$$

[1]Note que $x(t)'x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)^2$.

De resultados anteriores sabemos que se o par (A, C) for observável, a solução P da equação acima será positiva definida. Se não for observável, ela será positiva semi-definida e o par (A, C) será detectável, pois estamos assumindo que A é estável.

Defina a função $v(x) = x'Px$ e calcule sua derivada temporal para as trajetórias do sistema (3). Isto resulta em

$$\dot{v}(x) = x'P\dot{x} + \dot{x}'Px = x'PAx + (Ax)'Px = x'(A'P + PA)x = -x'C'Cx = -y'y \quad (5)$$

Integrando no tempo a relação $\dot{v}(x) = -y'y$ de zero à infinito obtemos

$$v(x(\infty)) - v(x(0)) = -\int_{t=0}^{\infty} y'y \; dt \quad (6)$$

Como o sistema é estável, teremos $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ e, portanto, chegamos a conclusão de que a energia do sinal $y(t)$, obtida como resposta do sistema (3) para a condição inicial $x(0)$ é dada por

$$\int_{t=0}^{\infty} y'y \; dt = v(x(0)) = x(0)'Px(0) \quad (7)$$

Esta ideia de calcular a energia da resposta de um sistema através da equação de Lyapunov pode ser estendida para o projeto de controladores. Nesse caso busca-se encontrar um controlador que minimize a energia de um dado sinal de saída escolhido pelo projetista. A seguir apresenta-se um resultado que foi proposto na década de 1960 e ficou conhecido como LQR.

2 Controle LQR

Considere o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (8)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o estado e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o controle. Baseado nas interpretações acima podemos afirmar que quanto maior for a energia do estado $\int_{t=0}^{\infty} x(t)'x(t) \; dt$ mais oscilatório e/ou lento é o sistema. Por outro lado, quanto maior for a energia do controle $\int_{t=0}^{\infty} u(t)'u(t) \; dt$ maior o esforço dos atuadores no sentido de que o vetor de controle possui maiores amplitudes e/ou os atuadores são excitados em regime transitório durante um tempo maior. Idealmente, deveríamos ter pequena energia do estado e de controle mas isso não é possível pois o sistema se torna mais rápido (polos mais à esquerda) graças a um esforço maior de controle. A filosofia de projeto do controlador LQR é estabelecer um compromisso entre as energias de estado e controle através da seguinte função custo a ser minimizada

$$J = \min_{u(t)} \int_{0}^{\infty} z(t)'z(t) \; dt \quad (9)$$

$$z(t)'z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q & N \\ N' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde Q, R, N são matrizes de ponderação que definem o sinal $z(t)$ escolhido pelo projetista para representar o compromisso desejado. Tipicamente Q, R são escolhidas diagonais e N nula. Nesse caso, $x(t)'Qx(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i(t)^2$ e $u(t)'Ru(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i u_i(t)^2$ onde q_i, r_i são os elementos positivos nas diagonais das matrizes Q, R. Como o sinal de controle a ser projetado deve minimizar a função custo acima, o elemento q_i deve ser escolhido maior que q_j quando a minimização da energia da variável x_i é prioritária em relação à minimização da energia de x_j. Os elementos r_i de ponderação do controle são escolhidos de forma análoga. Uma técnica para a escolha dessas matrizes de ponderação pode ser encontrada em [2].

O sinal $z(t)$, que representa a variável cuja energia deve ser minimizada, pode ser interpretado por exemplo, como uma variável que representa o consumo de energia do sistema. Razão pela qual se deseja minimizá-la. Através da linearização dessa variável de consumo podemos representar o sinal linearizado $z(t)$ na forma

$$z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) \tag{11}$$

então temos

$$z(t)'z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C_z'C_z & C_z'D_z \\ D_z'C_z & D_z'D_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

de onde tiramos as matrizes Q, N, R por comparação.

Teorema 1. *Suponha que o sistema* (8) *seja estabilizável*[2] *e considere o critério quadrático* (9) *com* $Q > 0$, $R > 0$ *dadas e* $N = 0$. *A lei de controle que estabiliza o sistema e minimiza o critério* (9) *é* $u(t) = -Kx(t)$ *onde* $K = R^{-1}B'P$ *e* P *é a única solução positiva definida da equação de Riccati a seguir.*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \tag{13}$$

■

Prova. *Defina* $v(x(t)) = x(t)'Px(t)$ *onde* $P > 0$ *é a solução da equação de Riccati* (13). *Como o sistema deve ser estável em malha fechada devemos ter* $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. *Logo,* $v(x(\infty)) = 0$ *e podemos reescrever o critério* (9) *na forma*

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} \left[x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t) + \dot{v}(x(t)) \right] \, dt + v(x(0)) \tag{14}$$

Defina $\xi(t) = R^{-\frac{1}{2}}B'Px(t) + R^{\frac{1}{2}}u(t)$ *e reescreva o critério acima como*

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} \left[x(t)' \left(A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q \right) x(t) + \xi(t)'\xi(t) \right] \, dt + v(x(0)) \tag{15}$$

Para a lei de controle proposta no teorema temos $J = v(x(0)) = x(0)'Px(0)$, *pois* $A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0$ *e* $u(t) = -R^{-1}B'Px(t)$, *o que implica* $\xi(t) = 0$. *Para qualquer outra lei de controle teríamos um valor maior da função custo pois* $\xi(t)$ *seria não nulo. Para*

[2] Um sistema é estabilizável se os modos não controláveis, quando existirem, forem estáveis.

mostrar que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável, note que a equação de Riccati (13) *pode ser reescrita na forma*

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + K'RK + Q = 0 \tag{16}$$

Como $P > 0$ e $K'RK + Q > 0$, pois $Q > 0$, concluímos que o sistema é exponencialmente estável, pois $v(x(t))$ é uma função de Lyapunov para o sistema de malha fechada. Para completar a prova note que os polos não controláveis, se existirem, também estarão presentes na malha fechada, pois o controle não afeta esses polos. Assim, para que o sistema de malha fechada seja estável é preciso que o sistema seja estabilizável. ■

Podemos confirmar que o valor ótimo do critério (9) é $J = x(0)'Px(0)$ comparando as equações (16) e (4) e usando o resultado (7) que fornece

$$\int_{t=0}^{\infty} z(t)'z(t)\ dt = \int_{t=0}^{\infty} x'(Q + K'RK)x\ dt = \int_{t=0}^{\infty} (x'Qx + u'Ru)\ dt = v(x(0)) = x(0)'Px(0) \tag{17}$$

Lembre-se que em malha fechada o sistema é dado por $\dot{x} = (A - BK)x$, o controle por $u = -Kx$ e a função de Lyapunov para a malha fechada por $v(x) = x'Px$ onde $P > 0$ é a solução da equação de Riccati (13).

No teorema anterior, a matriz Q é positiva definida. Podemos relaxar essa hipótese para Q positiva semi-definida desde que possamos decompor $Q = C_0'C_0$ com o par (A, C_0) observável (para obter $P > 0$) ou com o par (A, C_0) detectável (para obter $P \geq 0$).

O controlador LQR possui propriedades interessantes. Essas listadas abaixo foram tiradas dos livros [3], [4], [1]. Por exemplo, o LQR possui margem de ganho infinita e pode ser reduzido pela metade que o sistema continua estável. Além disso o LQR apresenta uma margem de fase de pelo menos 60 graus. Para sistemas MIMO com $R = I$ as mesmas propriedades se aplicam canal por canal no sinal de controle. No caso SISO o LQR apresenta uma atenuação de -20 db/década nas altas frequências, o que em muitos casos é insuficiente para uma boa supressão de ruídos e dinâmicas não modeladas de altas frequências.

Referências

[1] B. Friedland. *Control Systems Design: An Introduction to State Space Methods.* McGraw-Hill, 1986.

[2] M. A. Johnson and M. J. Grimble. Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design. *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications*, 134(1):53–71, Janeiro 1987.

[3] Uwe Mackenroth. *Robust Control Systems.* Springer-Verlag, Berlin, Alemanha, 1 edition, 2004.

[4] R. T. Stefani, C. J. Savant, and B. Shahian. *Design of Feedback Control Systems.* Saunders College Publishing, 1994.