Controle com restrições

Prof. Tiago Dezuo

Em geral, nas aplicações práticas, os sistemas de controle operam em regiões do espaço de estados sujeitas a restrições nas variáveis de estado e/ou controle. Estas restrições correspondem a limites inferiores e/ou superiores nas variáveis de interesse do sistema, descritas por limitações de ordem tecnológica (por exemplo, saturação de atuadores) e/ou de segurança [2].

Considere o sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das variáveis de controle.

Portanto, neste documento é abordado o problema de controle sujeito a restrições no sinal de controle (por exemplo, para evitar a saturação de sistemas e a consequente perda do comportamento linear) e no sinal de saída (visando atender especificações de segurança). Em ambos os casos, será levada em conta uma lei de controle do tipo $u = Kx$.

1 Restrições na variável de controle

Em geral, devido às limitações físicas dos atuadores, o sinal de controle $u(t)$ está sujeito a saturação. Uma solução usual neste tipo de problema é a de impor limitações no sinal de controle $u = Kx$. Com isso, o sistema em malha fechada manterá o comportamento linear, isto é, $\dot{x} = (A + BK)x$. Para tal, podem ser feitas as considerações a seguir.

- As condições iniciais são conhecidas, limitadas em norma $\|x_0\| \le \varepsilon$ e o estado $x(t)$ pertence ao elipsoide $\mathcal{E} := \{x \ : \ x'Q^{-1}x \le 1\}$, isto é, $x(t) \in \mathcal{E}, \ \forall t \ge 0$, inclusive x_0.
- Existem matrizes $Q > 0$ e Y que satisfazem o problema de estabilização

$$\exists Q = Q', \ Y \ : \ \begin{cases} Q > 0 \\ QA' + AQ + Y'B' + BY < 0 \end{cases} \tag{2}$$

- O i-ésimo sinal de controle $u_i, \ i \in \{1, \ldots, p\}$ deve ser limitado entre $\pm\mu_i$.

Essas considerações implicam em:

$$\begin{aligned} \max_{t\ge 0} \|u_i(t)\| = \max_{t \ge 0} \|K_i x(t)\| &\le \max_{x \in \mathcal{E}} \|Y_i Q^{-1} x\| \\ &\le \|Y_i Q^{-\frac{1}{2}}\| \max_{x\in\mathcal{E}} \|Q^{-\frac{1}{2}} x\| \le \sqrt{\lambda_{max}\left(Q^{-\frac{1}{2}} Y_i' Y_i Q^{-\frac{1}{2}}\right)} \le \mu_i, \end{aligned} \tag{3}$$

onde K_i e Y_i correspondem à i-ésima linha das matrizes K e Y, respectivamente, e $\lambda_{max}(\cdot)$ é o autovalor máximo de $(\cdot)$. Portanto, a restrição $\|u_i\| \leq \mu_i$, $\forall x \in \mathcal{E}$, é equivalente às condições LMI

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{-2} & e_j' \\ e_j & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y_i' \\ Y_i & \mu_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \tag{5}$$

onde o vetor e_j corresponde à j-ésima coluna da matriz identidade I_n.

Exemplo 1. *Considere o sistema*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0507 & -3,861 & 0 & -31,17 \\ -0,00117 & -0,5164 & 1 & 0 \\ -0,00013 & 1,4168 & -0,4932 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0717 \\ -0,1645 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6}$$

que representa o movimento longitudinal de um avião F-16 na aproximação de aterrissagem, de forma simplificada [1]. Note que este sistema é instável em malha aberta. Determine uma lei de controle $u = Kx$ que estabiliza o sistema. Suponha que o sinal de controle está limitado a ± 10 e as condições iniciais estão limitadas em norma por $\|x_0\| \leq 2$. Note que $\varepsilon = 2$ e $\mu = 10$. Aplicando as condições (2) e (4), obtém-se as matrizes Q, Y e, consequentemente, o ganho de controle[1] K.

2 Restrições no sinal de saída

Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \nu &= Ex \end{aligned} \tag{7}$$

onde $\nu \in \mathbb{R}^l$ representa algumas das saídas do sistema, as quais desejamos limitar em amplitude por segurança.

Visando obter uma formulação LMI para este problema, podem ser feitas as considerações a seguir.

- As condições iniciais são conhecidas, limitadas em norma $\|x_0\| \leq \epsilon$ e o estado $x(t)$ está contido no elipsoide $\mathcal{E} := \{x \ : \ x'Q^{-1}x \leq 1\}$, isto é, $x(t) \in \mathcal{E}$, $\forall t \geq 0$, inclusive x_0.
- Existem matrizes $Q > 0$ e Y que satisfazem o problema de estabilização (2).
- A i-ésima saída de segurança, $i \in \{1, \ldots, l\}$, é limitada em norma, isto é, $\|\nu_i\| \leq \alpha_i$.

[1] Simule a resposta para uma condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$.

Levando em conta estas considerações, pode-se escrever que

$$\max_{t\geq 0} \|\nu_i\| \leq \alpha_i \qquad \forall x \ : \ x'Q^{-1}x \leq 1 \tag{8}$$

$$\max_{t\geq 0} \|E_i x\| \leq \max_{x\in\mathcal{E}} \|E_i x\| \qquad \forall x \ : \ x'Q^{-1}x \leq 1 \tag{9}$$

As relações anteriores são equivalentes ao seguinte problema LMI.

$$\exists \tau \ : \ \begin{cases} \tau \geq 0, \ \tau \leq 1 \\ \begin{bmatrix} Q & QE_i' \\ E_iQ & \tau\alpha_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in \{1,\ldots,l\} \\ \begin{bmatrix} \epsilon^{-2} & e_j' \\ e_j & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\} \end{cases} \tag{10}$$

onde o vetor e_j corresponde à j-ésima coluna da matriz identidade I_n.

Exemplo 2. *Considere o mesmo problema do Exercício 1. Suponha que o estado x_1 deva ser limitado em ± 101. Neste caso, deseja-se restringir a excursão do sinal $x_1(t)$, logo tem-se a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Note que $\epsilon = \varepsilon = 2$ e $\alpha = 101$. Aplicando as condições* (2), (4) *e* (10), *obtém-se as matrizes Q, Y e, consequentemente, K.* ■

Referências

[1] B. Friedland. *Control Systems Design: An Introduction to State Space Methods.* McGraw-Hill, 1986.

[2] M. M. D. Santos. *Regulação sob Restrições com Alocação de Polos: Abordagem por Invariância Positiva e Programação Linear.* PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, Setembro 1996.