Critério de Lyapunov para estabilidade

Prof. Tiago Dezuo

Estabilidade é o desempenho mínimo de todo sistema de controle. Por esse motivo a análise de estabilidade é o ponto de partida para o projeto de sistemas de controle. Neste material iremos estudar sistemas cujas variáveis de estado convergem exponencialmente para um ponto de equilíbrio.

Estabilidade é uma propriedade do sistema que garante a convergência das variáveis de estado para a situação desejada em regime permanente. Existem vários tipos de estabilidade, dependendo de como é a situação desejada em regime permanente. As variáveis de estado podem ser constantes em regime permanente, e nesse caso chamamos essa condição de operação de ponto equilíbrio, ou oscilam com certa frequência e amplitude e nesse caso a condição de operação é chamada de ciclo limite. Podemos ainda classificar a estabilidade dependendo de como se dá a convergência do estado para a situação de regime permanente, isto é, se converge exponencialmente ou assintoticamente para a situação de equilíbrio.

No final do século 19, um cientista russo, chamado Lyapunov, observou que sistemas cujas variáveis de estado convergem exponencialmente para um ponto de equilíbrio são aqueles cuja energia total (energia de todas as variáveis de estado) decresce ao longo do tempo, isto é, são sistemas que possuem algum tipo de energia dissipada. Considere o exemplo do movimento de um pêndulo de massa M e haste rígida de comprimento L que descreve um movimento circular de raio L. Ao soltar o pêndulo de uma dada posição, as energias cinéticas e potencial das variáveis de estado (posição e velocidade angulares) oscilam entre valores máximos e mínimos, mas se houver dissipação de energia (devido à presença de atrito no caso) o movimento vai convergir para a situação de equilíbrio onde as variáveis de estado são constantes, e isso ocorre apenas quando a energia de todas as variáveis de estado foram completamente dissipadas.

Para caracterizar matematicamente a estabilidade de sistemas podemos utilizar tanto a resposta de estado zero quanto a de entrada zero. A primeira explora o fato que todo sistema estável, com condições iniciais nulas, produz saídas limitadas sempre que as entradas forem limitadas. A segunda explora o fato que todo sistema estável sem excitação externa possui um transitório que desaparece qualquer que seja a condição inicial que lhe deu origem. Para sistemas lineares invariantes no tempo essas duas formas distintas de definir estabilidade são na realidade equivalentes aos critérios clássicos baseados na localização dos polos do sistema. As definições que iremos utilizar ao longo de todo esse documento se baseiam na resposta de entrada nula.

Considere um sistema dinâmico não linear

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

onde $x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ denota o vetor de estados do sistema, $\mathcal{X}$ uma dada vizinhança da origem, e $f : [0, \infty) \times \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$ contínua em $\mathcal{X}$. Suponha que f tem um equilíbrio em x_e de modo que $f(t, x_e) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$, então:

1. Este equilíbrio é chamado Lyapunov estável se, para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $\|x(0) - x_e\| < \delta$, então para todo $t \geq 0$ tem-se $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$.

2. O equilíbrio do sistema é chamado assintoticamente estável se é Lyapunov estável e existe $\delta > 0$ tal que se $\|x(0) - x_e\| < \delta$, então $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$.

3. O equilíbrio do sistema é dito exponencialmente estável se é assintoticamente estável e existem $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ tais que se $\|x(0) - x_e\| < \delta$, então $\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\beta t}$, para todo $t \geq 0$.

Conceitualmente, os significados dos termos anteriores são os seguintes:

1. Um equilíbrio Lyapunov estável significa que que soluções iniciando "perto o suficiente" do equilíbrio (dentro de uma distância δ deste) permanecem "perto o suficiente" para sempre (dentro de uma distância ϵ deste). Note que isso deve ser verdade para qualquer ϵ que se escolha.

2. Estabilidade assintótica significa que soluções que se iniciam perto o suficiente não apenas permanecem perto o suficiente como também eventualmente convergem para o equilíbrio.

3. Estabilidade exponencial significa que soluções não apenas convergem, mas na verdade convergem mais rápido que ou pelo menos tão rápido quanto uma taxa particular conhecida:
$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\beta t}. \tag{2}$$

Pode-se testar se a origem de um sistema é exponencialmente estável através do seguinte resultado.

Teorema 1. *Considere o sistema (1) e seja $V(t, x) : [0, \infty) \times \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$\begin{array}{l} k_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^a \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{\partial V'}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^a \end{array} \quad , \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad , \quad \forall t \in [0, \infty) \tag{3}$$

onde a, k_i são constantes positivas. Então o equilíbrio $x = 0$ de (1) é exponencialmente estável. Se, além disso, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ então a origem é globalmente exponencialmente estável. ■

Prova. *Observe que*
$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3 \|x\|^a \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t, x) \tag{4}$$
de onde concluímos pelo Lema da Comparação (Lemma 3.4 [1]) que
$$V(t, x) \leq e^{-\,(k_3/k_2)\,t} V(0, x(0)) \tag{5}$$

Logo,

$$\|x(t)\| \leq (V(t,x(t))/k_1)^{\frac{1}{a}} \leq \left(e^{-\,(k_3/k_2)\,t}V(0,x(0))/k_1\right)^{\frac{1}{a}}$$
$$\leq \left(e^{-\,(k_3/k_2)\,t}k_2\|x(0)\|^a/k_1\right)^{\frac{1}{a}} \leq (k_2/k_1)^{\frac{1}{a}}\|x(0)\|e^{-\,(k_3/ak_2)\,t} \quad (6)$$

o que mostra a estabilidade exponencial. Para estabilidade global basta que $x(0)$ possa ser qualquer em $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. ■

A função $V(t,x)$ representa a energia total das variáveis de estado do sistema e é chamada de função de Lyapunov. As condições do teorema acima indicam essencialmente que a função $V(t,x)$ é positiva e limitada, como toda função que representa energia, e sua derivada temporal é negativa sempre, indicando decrescimento da função $V(t,x)$. Logo, o sistema dissipa energia com o passar do tempo. Como é muito difícil obter a expressão analítica da energia total do sistema, o projetista deve escolher uma função de Lyapunov que represente a energia total. Porém, o teorema não fornece nenhuma pista de como determiná-la no caso geral.

Para algumas classes de sistemas, como sistemas lineares por exemplo, já se conhece técnicas de determinação de funções de Lyapunov muito eficientes. Este é o tema das próximas seções. Antes porém, alguns resultados preliminares se fazem necessários, pois o método utiliza um tipo especial de função conhecida como *forma quadrática.*

1 Formas Quadráticas

Uma forma quadrática é toda função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ do tipo:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j \quad , \quad p_{ij} = p_{ji} \tag{7}$$

onde x_i, x_j são duas componentes quaisquer da variável vetorial x e p_{ij} são constantes. A condição $p_{ij} = p_{ji}$ é simplesmente uma normalização e pode ser feita sem perda de generalidade. Veja no exemplo

$$V(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_1 + 10x_2^2 \tag{8}$$
$$= 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2 \tag{9}$$
$$= 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 10x_2^2 \tag{10}$$

Assim, toda forma quadrática pode ser representada em termos matriciais através de uma matriz simétrica cujos elementos são as constantes p_{ij}. Ainda no exemplo anterior temos

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x'Px \tag{11}$$

e note que a matriz P é simétrica. A mesma normalização acima pode ser feita em termos matriciais. Retornando ao exemplo, defina

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \frac{1}{2}(Q+Q') \quad , \quad \tilde{P} = \frac{1}{2}(Q-Q') \tag{12}$$

e note que $Q = P + \tilde{P}$. Como $x'Q'x$ é um escalar real temos $x'Q'x = (x'Q'x)' = x'Qx$. Logo, temos

$$x'Qx = x'Qx + x'\tilde{P}x = x'Px + \frac{1}{2}(x'Qx - x'Q'x) = x'Px \qquad (13)$$

Em situações particulares, tipicamente quando representamos o sistema por sua função de transferência, podemos precisar trabalhar com formas quadráticas complexas. Quando p_{ij} são constantes complexas, basta trocar a relação $p_{ij} = p_{ji}$ por $p_{ij} = \overline{p}_{ji}$, onde $\overline{p}_{ji}$ é o conjugado complexo de p_{ij}. Nesse caso, a matriz P recebe o nome de hermitiana e satisfaz a relação $P = \overline{P}' = P^*$ onde o símbolo P^* representa o transposto conjugado complexo de P.

1.1 Propriedades

Propriedade 1. *Toda matriz simétrica possui autovalores reais.* ■

Para ver isso, sejam g, λ um par qualquer de autovetor e autovalor de P, isto é, $Pg = \lambda g$. Assim temos[1] $\overline{g}Pg = \lambda\overline{g}g$. Como P é simétrica temos $\overline{(\overline{g}Pg)} = \overline{g}Pg$ e portanto $\overline{g}Pg$ é real. Além disso, $\overline{g}g$ também é real, pois é o quadrado do módulo do vetor g. Logo, da igualdade $\overline{g}Pg = \lambda\overline{g}g$ concluímos que λ também é real.

Propriedade 2. *A função $x'Px$ é limitada acima e abaixo, como indicado a seguir.*

$$\lambda_{min}x'x \leq x'Px \leq \lambda_{max}x'x \qquad (14)$$

onde λ_{min}, λ_{max} são respectivamente os autovalores mínimo e máximo de P. ■

Para ver isso basta considerar a decomposição $P = T'DT$ onde T é a matriz de autovetores[2] de P e D é a matriz diagonal dos autovalores λ_i de P. Então $x'Px = z'Dz$ onde $z = Tx$. Como $z'Dz = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2$ temos $z'Dz \leq \lambda_{max} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \lambda_{max}z'z = \lambda_{max}x'T'Tx = \lambda_{max}x'x$, pois $T' = T^{-1}$. De forma análoga, temos $z'Dz \geq \lambda_{min} \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \lambda_{min}z'z = \lambda_{min}x'T'Tx = \lambda_{min}x'x$.

Lembrando que $x'x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, podemos concluir com (14) que se P possui todos os autovalores positivos então $x'Px$ é um número positivo para todo x não nulo. Note que o contrário também é verdadeiro. Nesse caso, dizemos que $v(x)$ é uma função positiva definida (notação: $v(x) > 0$), e P é uma matriz positiva definida (notação: $P > 0$). A Tabela 1 mostra a relação entre o sinal da função $x'Px$ e os autovalores da matriz P.

Propriedade 3. *Uma matriz P é positiva definida ($P > 0$) se, e somente se, os determinantes menores principais de P forem positivos.* ■

Esse resultado é conhecido como critério de Sylvester. Por exemplo para

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

os determinantes menores principais são:

[1] O símbolo $\overline{g}$ indica o transposto do conjugado complexo de g.

[2] Se P é simétrica, a transformação que a diagonaliza é ortonormal, isto é, $T' = T^{-1}$. Veja que, como P é simétrica, temos $P = T^{-1}DT = (T^{-1}DT)' = T'D(T^{-1})'$. Logo, por igualdade deduzimos $T' = T^{-1}$.

Tabela 1: Nomenclatura de funções e matrizes.

Sinal de $v(x)$	**Autovalores de** P	**Função** $v(x)$	**Matriz** P
positivo para todo $x \neq 0$	todos positivos	positiva definida $v(x) > 0$	positiva definida $P > 0$
positivo ou nulo para todo $x \neq 0$	todos positivos ou nulos	positiva semi-definida $v(x) \geq 0$	positiva semi-definida $P \geq 0$
negativo para todo $x \neq 0$	todos negativos	negativa definida $v(x) > 0$	negativa definida $P > 0$
negativo ou nulo para todo $x \neq 0$	todos negativos ou nulos	negativa semi-definida $v(x) \geq 0$	negativa semi-definida $P \geq 0$

- $P_1 > 0$
- $\begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_4 \end{vmatrix} = P_1 P_4 - P_2^2 > 0$
- $\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{vmatrix} = P_1 P_4 P_6 + 2P_2 P_5 P_3 - P_3^2 P_4 - P_2^2 P_6 - P_1 P_5^2 > 0$

Propriedade 4. *A função $v(x) = x'Px$ é uma medida de distância do ponto x à origem quando P é positiva definida. Note que $x'x = \|x\|^2$ é o quadrado da norma euclidiana do vetor x. Assim, vemos com (14) que $x'Px$ é uma medida de distância que está abaixo de $\lambda_{max} x'x$ e acima de $\lambda_{min} x'x$.* ■

Por exemplo, a seguinte função é positiva definida.

$$v(x) = x'Px \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2 \tag{17}$$

O conjunto de todos os vetores x tais que $v(x) = c$, onde c é uma constante positiva qualquer, formam uma elipse quando $P > 0$. Os semi-eixos da elipse são $\sqrt{c/\lambda_i}$ onde λ_i são os autovalores de P. Mais detalhes sobre funções e matrizes positivas e formas quadráticas podem ser encontradas nos apêndices do livro [2].

2 Estabilidade de sistemas lineares invariantes

Para sistemas lineares invariantes no tempo o Teorema 1 pode ser simplificado tornando-se equivalente aos resultados clássicos de Routh-Hurvitz e Nyquist.

Teorema 2. *O sistema linear invariante*

$$\dot{x} = Ax \tag{18}$$

é exponencialmente estável, isto é, os autovalores da matriz A possuem parte real estritamente negativa, se, e somente se, a solução P simétrica da equação matricial:

$$A'P + PA + Q = 0 \tag{19}$$

for positiva definida, onde Q é uma matriz positiva definida dada que pode ser arbitrariamente escolhida. ∎

Prova. *Se $\exists P > 0$ solução de $A'P + PA + Q = 0$ com $Q > 0$ dada, então $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema $\dot{x} = Ax$ pois para $v(x) = x'Px$ temos:*

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x = -x'Qx < 0 \tag{20}$$

e como $v(x) > 0$ e $\dot{v}(x) < 0$ para todo ponto x da trajetória do sistema $\dot{x} = Ax$, concluímos que o estado converge para a origem. A estabilidade exponencial se mostra como no Teorema 1.

Por outro lado, se o sistema é exponencialmente estável, então a matriz de transição de estados $\Phi = e^{At}$ é limitada e converge para zero quando $t \to \infty$. Isto implica que, para qualquer matriz $Q > 0$, temos $\Phi(t)'Q\Phi(t) = e^{A't}Qe^{At} > 0$, também limitada e convergindo para zero quando $t \to \infty$.

Logo, a matriz

$$P = \int_0^\infty e^{A't}Qe^{At}\, dt \tag{21}$$

é positiva definida, finita e satisfaz a equação $A'P + PA + Q = 0$. Para ver isso, substitua a P de (21) na equação para obter

$$A'P + PA = \int_0^\infty \left(A'e^{A't}Qe^{At} + e^{A't}Qe^{At}A \right)\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} e^{A't}Qe^{At} \right)\, dt \tag{22}$$

Como $\lim_{t\to\infty} e^{A't}Qe^{At} = 0$ pois o sistema é estável, temos

$$A'P + PA = \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A't}Qe^{At}\, dt = -Q \tag{23}$$

∎

Exemplo 1. *O sistema $\dot{x} = Ax$ com*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

é estável pois $\lambda(A) = \{-1, -1\}$. Logo, devemos encontrar uma solução $P > 0$ para $A'P + PA + Q = 0$, sendo $Q > 0$ uma matriz positiva definida que podemos escolher de forma arbitrária. Escolhendo Q igual à identidade, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{25}$$

que resulta em

$$\begin{bmatrix} -P_2 & -P_3 \\ P_1 - 2P_2 & P_2 - 2P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_2 & -P_3 \\ P_1 - 2P_2 & P_2 - 2P_3 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{26}$$

Logo:

$$\begin{cases} -2P_2 + 1 = 0 \\ -P_3 + P_1 - 2P_2 = 0 \\ 2P_2 - 4P_3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = 0.5 \\ P_3 = 0.5 \\ P_1 = 1.5 \end{cases} \tag{27}$$

Então

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \textit{Menores principais:} \\ P_1 = 1.5 > 0 \\ det(P) = 1.5 \cdot 0.5 - 0.5^2 > 0 \end{cases} \tag{28}$$

Logo $P > 0$, pois seus menores principais são positivos[3]*, e portanto o sistema é exponencialmente estável*[4]*.* ■

Exercício 1. *Considere os três sistemas não lineares $\dot{x} = f_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, descritos a seguir e responda às alternativas.*

$$\textit{Sistema 1} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - x_2^3 \end{cases} \tag{29}$$

$$\textit{Sistema 2} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - x_2^3 \end{cases} \tag{30}$$

$$\textit{Sistema 3} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - x_2^3 \end{cases} \tag{31}$$

a) *O que é possível concluir sobre a estabilidade destes sistemas usando a candidata a função de Lyapunov apresentada na Equação (32)?*

$$v(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{32}$$

b) *Os sistemas são estáveis (ao menos em uma vizinhança do equilíbrio)? Sugestão: utilize o `pplane` para plotar os retratos de fase.*

c) *Sabendo que um sistema linearizado no ponto de equilíbrio $x = 0$ é dado por $\dot{x} = Ax$ com*

$$A = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x=0} \tag{33}$$

[3]Verifique que os autovalores de P são positivos.

[4]A equação de Lyapunov pode ser resolvida no Matlab com o auxílio da função `lyap`.

Seria possível encontrar uma função de Lyapunov que mostre a estabilidade da origem do Sistema 2? Se sim, a função obtida pode ser utilizada para mostrar a estabilidade do sistema não linear? ■

A equação $A'P + PA + Q = 0$ é conhecida como equação de Lyapunov e possui solução única para uma dada Q se os autovalores da matriz A satisfazem $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ para $i \neq j = 1, \ldots, n$.

É interessante notar que a matriz Q em (19) pode ser arbitrariamente escolhida. A escolha mais simples é $Q = I_n$ porém podemos eliminar a matriz Q da equação. Como $Q > 0$ a equação (19) é equivalente à desigualdade

$$A'P + PA < 0 \tag{34}$$

Para ver isso basta verificar que se (19) está satisfeita para algum par P, Q então $A'P+PA = -Q < 0$. Logo (34) também está satisfeita. Por outro lado se (34) está satisfeita para alguma P então podemos definir Q como sendo $Q = -(A'P + PA)$ e observe que $Q > 0$. Logo (19) está satisfeita.

Se por um lado as expressões (19) e (34) são equivalentes, por outro elas possuem propriedades bem distintas. Em particular, as vantagens de (34) serão exploradas em estratégias de controle e filtragem com abordagem via desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs).

Referências

[1] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.

[2] Katsuhiko Ogata. *Engenharia de controle Moderno.* Prentice Hall, 2 edition, 1990.