Controle a custo garantido

Prof. Tiago Dezuo

Será apresentada neste documento uma abordagem similar ao Regulador Linear Quadrático (LQR), onde uma função custo[1] é minimizada. Porém, ao invés de utilizar equações de Riccati para resolver o problema iremos utilizar LMIs.

De forma similar ao critério quadrático do LQR será explorado aqui também o compromisso que existe entre estabilizar o sistema rapidamente e a energia de controle utilizada. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) \\ u(t) &= Kx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

onde $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é um vetor auxiliar cuja energia queremos minimizar e C_z, D_z são matrizes constantes de ponderação com dimensões apropriadas a serem escolhidas pelo projetista de forma similar às matrizes de ponderação Q, R do LQR. Considere ainda a função custo

$$J = \min_{u(t)} \int_0^\infty z(t)'z(t)\ dt. \tag{2}$$

Note que

$$z(t)'z(t) = x(t)'C_z'C_z x(t) + x(t)'C_z'D_z u(t) + u(t)'D_z'C_z x(t) + u(t)'D_z'D_z u(t) \tag{3}$$

e portanto a função custo (3) se torna idêntica a do LQR se escolhermos C_z, D_z de forma que $C_z'D_z = 0$ e C_z e D_z de posto completo o que implica $Q = C_z'C_z > 0$ e $R = D_z'D_z > 0$.

O problema de interesse neste documento pode ser formalizado como se segue.

Problema 1. *Determinar uma lei de controle $u = Kx$ para o sistema (1) tal que a função custo definida em (2) seja minimizada para uma dada condição inicial $x(0) = x_0$.* ■

Uma solução para o problema acima pode ser facilmente obtida impondo-se a seguinte condição na desigualdade de Lyapunov [1]:

$$\dot{V}(x) + z'z < 0 \tag{4}$$

onde $\dot{V}(x)$ é a derivada temporal da função de Lyapunov quadrática $V(x) = x'Px$.

Integrando-se (4) de 0 a $T > 0$, obtém-se:

$$V(x(T)) - V(x(0)) + \int_0^\infty z(t)'z(t) < 0 \tag{5}$$

[1] Um valor de custo pequeno indica um sistema com elevado desempenho.

Supondo que o sistema (1) seja estável em malha fechada, conclui-se que $\lim_{T\to\infty} x(T) = 0$ e então $\lim_{T\to\infty} V(x(T)) = 0$. Desta forma, a expressão anterior equivale a

$$\int_0^\infty z(t)'z(t)\ dt < x_0' P x_0 = V(x_0) \quad , \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Logo, minimizando o valor de $x_0'Px_0$ estamos minimizando um limitante superior de J que é a função custo em (2). Por outro lado, como o sistema em malha fechada é dado por $\dot{x} = (A + BK)x$ e $z = (C_z + D_zK)x$ a condição (4) pode se reescrita na forma

$$\dot{V}(x) + z'z = x'(A + BK)'Px + x'P(A + BK)x + x'(C_z + D_zK)'(C_z + D_zK)x < 0. \tag{7}$$

Definindo $Q = P^{-1}$ e λ um escalar tal que $\lambda > x_0'Px_0$, obtemos as condições a seguir.

$$\lambda - x_0'Q^{-1}x_0 > 0 \tag{8}$$

$$Q\left[(A + BK)'P + P(A + BK) + (C_z + D_zK)'(C_z + D_zK)\right]Q < 0 \tag{9}$$

Com o complemento de Schur e a mudança de variável $Y = KQ$ podemos enunciar a seguinte solução em termos de LMIs para o Problema 1.

Teorema 1. *Considere o sistema linear em (1) com uma dada condição inicial $x(0) = x_0$. Suponha que as matrizes $Q = Q'$ e Y de dimensões apropriadas sejam a solução do seguinte problema de otimização:*

$$\min \lambda \text{ sujeito a: } \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda & x_0' \\ x_0 & Q \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY & QC_z' + Y'D_z' \\ C_zQ + D_zY & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Então o sistema (1) com $K = YQ^{-1}$ é assintoticamente estável e a função custo definida em (2) satisfaz $J < x_0'Q^{-1}x_0$. ■

Exemplo 1. *Considere o sistema linear*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

com a seguinte saída de desempenho:

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{12}$$

e uma condição inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}'$.

Note que $z(t) = \left[\begin{array}{ccc} 0.1x_2(t) & 0.01u_1(t) & u_2(t) \end{array} \right]'$ *e, portanto, as matrizes* C_z*,* D_z *foram escolhidas para ponderar fortemente a entrada de controle* u_2*, evitando assim excessiva energia desse sinal. Aplicando a técnica de controle custo garantido pode-se projetar uma lei de controle* $u = Kx$ *de maneira a minimizar a energia destes sinais de interesse.*

Através do Teorema 1 obtém-se o ganho do controlador. Pode-se verificar que a segunda linha da matriz de ganhos K*, que define o sinal de controle* $u_2(t)$*, possui elementos bastante pequenos indicando que o sinal de controle* $u_2(t)$ *possui amplitudes bem menores que* $u_1(t)$ *para o mesmo vetor de estados.* ■

Exercício 1. *Verifique no Exemplo 1 anterior que a função custo é idêntica a do LQR se escolhermos* $Q = C_z'C_z > 0$ *e* $R = D_z'D_z > 0$*. Resolva o LQR com essas matrizes de ponderação e compare as matrizes* Q^{-1}*,* K *obtidas no exemplo com* P*,* $-K$ *obtidas no LQR. Qual o valor ótimo da função objetivo nos dois casos para a mesma condição inicial? Para uma outra condição inicial a matriz* Q *obtida seria diferente?* ■

Utilizando a propriedade de convexidade das LMIs, pode-se resolver o problema de minimizar λ em (10) considerando qualquer condição inicial num dado conjunto politópico $\mathcal{X}_0$ com vértices conhecidos, isto é: $\forall x_0 \in \mathcal{X}_0$. O próximo corolário formaliza este resultado.

Corolário 1. *Considere o sistema* (1) *e um conjunto* $\mathcal{X}_0$ *de condições iniciais, onde* $\mathcal{X}_0$ *é um politopo com vértices conhecidos. Suponha que existam matrizes* $Q = Q'$ *e* Y *de dimensões apropriadas que solucionem o problema de otimização* (10) *para todo* x_0 *nos vértices do politopo* $\mathcal{X}_0$*. Então o sistema* (1) *com* $K = YQ^{-1}$ *é assintoticamente estável e a função custo definida em* (2) *satisfaz* $J < x_0'Q^{-1}x_0$ *para qualquer* $x_0 \in \mathcal{X}_0$*.* ■

Frequentemente, os sistemas reais estão sujeitos a perturbações externas e ruídos de medida que podem degradar o desempenho do sistema. Existem, na prática, várias formas de perturbações e ruídos, como, por exemplo, força da gravidade, pressão atmosférica, ventos, interferência eletromagnética, etc. Estas entradas não controláveis podem ser modeladas por diferentes tipos de sinais. Para perturbações de curta duração no tempo, por exemplo, pode-se utilizar o impulso como modelo para tal classe de sinais. Da mesma forma, sinais praticamente constantes (lentos) podem ser modelados pela função degrau. Equivalentemente, outras formas de entradas são modeladas por sinais normalmente utilizados na teoria de controle (sinais senoidais, ruído branco, etc.).

Portanto, para sistemas sujeitos a perturbações externas deve-se minimizar de alguma maneira a influência destes sinais nas saídas de interesse do sistema através de uma adequada lei de controle. Nas próximas seções serão considerados os projetos de controladores que atendam especificações de controle em termos das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas como forma de minimizar o problema de rejeição de perturbações.

Referências

[1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 86. SIAM, Philadelphia, USA, December 1994.