$\mathcal{D}$-Estabilidade

Prof. Tiago Dezuo

Estabilidade é um requisito fundamental de um sistema de controle mas não garante um bom desempenho da resposta transitória do sistema. Existem sub-regiões do semi-plano complexo esquerdo que, além da estabilidade, nos dá garantia de bom desempenho transitório. Neste documento são apresentados métodos de projeto de uma realimentação de estados que nos oferece garantia de que os polos do sistema de malha fechada estarão numa dada região escolhida pelo projetista.

1 $\mathcal{D}$-Estabilidade: polos em regiões desejadas

O sistema linear invariante

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

é exponencialmente estável se e somente se todos os autovalores da matriz A estão no semi-plano esquerdo estrito. Um sistema que seja exponencialmente estável pode apresentar uma performance muito pobre se existirem autovalores muito próximos do eixo imaginário ou ainda se a parte imaginária de algum autovalor for muito grande em relação à sua parte real (polo oscilatório pouco amortecido). Por esse motivo é importante saber se os autovalores se encontram em sub-regiões do semiplano esquerdo que garantam ao sistema rapidez e poucas oscilações na resposta. Nesta seção são apresentados critérios de estabilidade que garantem que os polos do sistema nominal se encontram em uma dada região $\mathcal{D}$ do plano complexo $\mathbb{C}$, isto é, será determinado se todos os autovalores da matriz A pertencem a uma região $\mathcal{D} \in \mathbb{C}$. Com esta finalidade, considere a definição a seguir.

Definição 1 ($\mathcal{D}$-Estabilidade)**.** *O sistema linear invariante $\dot{x} = Ax$ é $\mathcal{D}$-estável se e somente se todos os autovalores da matriz A pertencem à sub-região $\mathcal{D}$ do plano complexo, isto é:*

$$\lambda_i(A) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \quad , \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

■

A noção de $\mathcal{D}$-estabilidade definida anteriormente permite determinar não somente a estabilidade, mas também analisar o comportamento transitório do sistema $\dot{x} = Ax$, visto que este comportamento está diretamente relacionado ao posicionamento do polos no plano complexo. Note também que a estabilidade quadrática pode ser vista como uma situação particular da $\mathcal{D}$-estabilidade quando $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$.

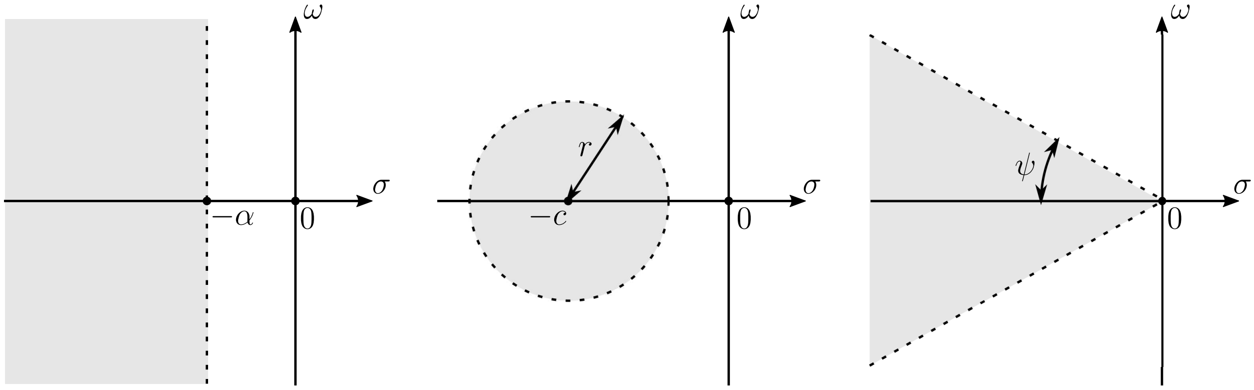
A seguir apresenta-se uma classe de regiões do plano complexo descritas em termos de LMIs, proposta inicialmente em [1].

Definição 2 (Regiões LMI)**.** *Um subconjunto $\mathcal{D}$ do plano complexo é denominado de uma região LMI se existem matrizes $L = L' \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ e $M \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ tais que:*

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \; : \; L + sM + s^* M' < 0\} \tag{3}$$

onde $s = \sigma + j\omega$. ■

Note que uma região LMI é um subconjunto do plano complexo a qual é representada por uma LMI em s e s^*, ou equivalentemente, uma LMI em $\sigma = \Re(s)$ e $\omega = \Im(s)$.



(a) semi-plano (b) disco (c) setor cônico

Figura 1: Regiões LMI.

Exemplo 1 (Exemplos de regiões LMI)**.** *Considere as seguintes regiões LMIs (representadas na Figura 1):*

(a) *$\mathcal{D}_a$, semi-plano com $\Re(s) < -\alpha$. Esta região pode ser definida pela inequação $s + s^* < -2\alpha$, a qual pode ser representada na formulação LMI em (3) através das seguintes matrizes:*

$$L = 2\alpha \quad e \quad M = 1. \tag{4}$$

(b) *$\mathcal{D}_b$, disco com raio r centrado em $(-c, 0)$. Esta região pode ser definida pela seguinte relação $(\sigma + c)^2 + \omega^2 < r^2$ ou equivalentemente por $(s + c)r^{-1}(s^* + c) < r$ levando à seguinte definição das matrizes L e M em (3):*

$$L = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix} \quad e \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

(c) *$\mathcal{D}_c$, setor cônico com ângulo interno 2ψ. Esta região pode ser definida por $\sigma \operatorname{sen}(\psi) + \omega \cos(\psi) < 0$ levando às seguintes matrizes:*

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad M = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\psi) & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & \operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Utilizando o resultado proposto em [1, Teorema 2.2], a $\mathcal{D}$-estabilidade pode ser determinada através do seguinte condição LMI.

Teorema 1. *O sistema $\dot{x} = Ax$ é D-estável se e somente se existe uma matriz simétrica positiva definida P tal que*

$$L \otimes P + M \otimes (PA) + M' \otimes (A'P) < 0, \tag{7}$$

onde a operação $\otimes$ corresponde ao produto de Kronecker[1] *de duas matrizes.* ■

Exemplo 2. *Determine se o seguinte sistema tem seus autovalores com parte real menor do que -1.*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix} x \ , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Pelo Exemplo 1, a região com $\Re(\lambda_i(A)) < -1$ pode ser representada na forma (3) *com $L = 2$ e $M = 1$. Utilizando o Teorema 1, obtém-se a condição LMI*

$$\exists P > 0 \quad : \quad A'P + PA + 2P < 0. \tag{9}$$

Através da solução computacional desta LMI, tem-se como resultado que o sistema (8) *é $\mathcal{D}$-estável, onde a região $\mathcal{D}$ é dada por*

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ 2 + s + s^* < 0\}. \tag{10}$$

■

Uma importante característica das regiões LMIs é a sua invariância com relação à operação de intersecção de conjuntos. Por exemplo, considere duas regiões LMIs $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, a intersecção $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ também é uma região LMI representada por

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left\{ s \in \mathbb{C} \ : \ \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} M_1' & 0 \\ 0 & M_2' \end{bmatrix} s^* < 0 \right\}. \tag{11}$$

Com o resultado acima pode-se determinar a $\mathcal{D}$-estabilidade de um sistema nominal, onde $\mathcal{D}$ é uma região LMI formada a partir da intersecção de outras regiões LMIs. Este resultado é resumido no seguinte corolário [1, Corolário 2.3].

Corolário 1. *Sejam $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_l$ regiões LMIs dadas, o sistema $\dot{x}$=Ax é $\mathcal{D}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{D}_l$-estável se e somente se existe uma matriz simétrica positiva definida P que satisfaz as seguintes restrições LMIs:*

$$L_i \otimes P + M_i \otimes (PA) + M_i' \otimes (A'P) < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, l, \tag{12}$$

onde $\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ L_i + M_i s + M_i' s^* < 0\}$. ■

[1] Para duas matrizes A e B, o produto de Kronecker $A \otimes B$ resulta em uma matriz cujos elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna são dados por $A_{ij}B$.

É importante observar que além da localização desejada dos autovalores a $\mathcal{D}$-estabilidade garante a estabilidade quadrática do sistema. Para sistemas lineares invariantes no tempo os autovalores estão diretamente ligados ao desempenho do sistema e as condições aqui apresentadas não são conservadoras. Porém é importante lembrar que para sistemas variantes no tempo a performance do sistema não pode ser caracterizada de forma simples em função da localização dos autovalores. Apesar desse inconveniente as condições aqui apresentadas ainda garantem estabilidade quadrática do sistema.

Finalmente note que para analisar a $\mathcal{D}$-estabilidade de um sistema incerto podemos utilizar as mesmas LMIs aqui apresentadas bastando apenas que a matriz de dinâmica do sistema $\dot{x} = Ax$ possa ser representada como uma função afim dos parâmetros incertos.

2 Alocação de polos via $\mathcal{D}$-estabilidade

Estamos agora interessados em projetar um controlador que realize a alocação de polos do sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \ , \qquad u = Kx, \tag{13}$$

em uma região $\mathcal{D}$ desejada. Como ponto de partida considere a forma dual do Teorema 1, isto é[2]:

$$\exists Q > 0 \ : \ \ L \otimes Q + M \otimes (AQ) + M' \otimes (QA') < 0, \tag{14}$$

Esta formulação para a $\mathcal{D}$-estabilidade permite a proposição do seguinte resultado.

Teorema 2. *Considere o sistema* (13) *e uma região LMI $\mathcal{D}$ contida em $\mathbb{C}^-$. Suponha que as matrizes Q e Y de dimensões apropriadas sejam uma solução do seguinte problema LMI:*

$$\exists Y,\ Q > 0 \ : \ \ L \otimes Q + M \otimes (AQ + BY) + M' \otimes (QA' + Y'B') < 0, \tag{15}$$

Então, o sistema (13) *com $K = YQ^{-1}$ é $\mathcal{D}$-estável. Em outras palavras:*

$$\lambda_i(A + BYQ^{-1}) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \quad , \quad i = 1, \dots, n. \tag{16}$$

■

Exemplo 3. *Considere o sistema* (13) *e a região LMI definida na Figura 1(b) com raio* 2 *e centro em* $(-5, 0)$*. Para esta região a condição* (15) *de projeto do controlador é equivalente ao seguinte problema LMI:*

$$\exists Y,\ Q > 0 \ : \ \begin{bmatrix} -2Q & 5Q + AQ + BY \\ 5Q + QA' + Y'B' & -2Q \end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

■

[2]Como os autovalores da matriz A são os mesmos de A', o problema de alocação de polos será definido nesta seção em termos do sistema dual onde substituímos A, M por A', M' nas condições originais.

A escolha da região $\mathcal{D}$ certamente introduz o compromisso entre respostas rápidas, menos oscilatórias e com menor sobressinal. A escolha ideal desta região pode ser analiticamente determinada somente para sistemas de segunda ordem levando-se em conta os valores desejados para o tempo de estabilização, sobre-sinal, frequência de amortecimento, etc. Outro fator agravante no posicionamento de polos é a tendência de produzir elevados sinais de controle, o que em situações práticas é pouco desejado. Por isso, restrições nessas várias são de grande interesse prático.

Referências

[1] M. Chilali and P. Gahinet. $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, Março 1996.