Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Prof. Tiago Dezuo

Neste documento é apresentada uma breve introdução sobre Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)[1]. Esta ferramenta tem sido extensivamente utilizada para resolver problemas os mais variados problemas de controle, em especial, por permitir o tratamento de sistemas híbridos e com garantias de robustez e performance. O conteúdo deste material é parcialmente baseado no Apêndice A da Referência [5] e no Capítulo 3 de [4]. Mais informações sobre LMIs podem ser encontradas em [1].

1 Introdução às LMIs

LMIs são desigualdades matriciais que são lineares ou afins com relação às variáveis a serem determinadas (variáveis de decisão). Estas desigualdades essencialmente expressam restrições convexas e, portanto, muitos problemas de otimização com funções objetivo também convexas podem ser facilmente resolvidos usando um dos diversos pacotes computacionais disponíveis. Este método tem se tornado muito popular entre os engenheiros de controle recentemente. Isso se deve à grande variedade de problemas de controle que podem ser formuladas em termos de LMIs.

Uma LMI pode ser escrita na forma $F(g) > 0$ onde

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^{q} g_i F_i \tag{1}$$

onde $g \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de variáveis de decisão e $F_0,\ F_1, \dots,\ F_q$ são matrizes constantes simétricas e reais, *i.e* $F_i = F_i'$, $i = 0, \dots, q$. O símbolo de desigualdade em (1) significa que $F(g)$ é positiva definida, ou seja, $x'F(p)x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero. Note que a desigualdade é linear[2] com relação às variáveis g_i.

Exemplo 1. *A restrição*

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0 \tag{2}$$

[1] Do inglês, *Linear Matrix Inequalities*.

[2] Na verdade é *afim*, mas a terminologia *linear* foi adotada por convenção, pois pode-se trocar de uma representação para a outra através de uma simples translação de coordenadas.

onde $P = P' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *é uma matriz a ser determinada, pode ser expressa na forma de LMI* (1) *com*

$$g = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \ , \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Portanto, (2) *é uma LMI.* ■

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece num problema na forma genérica afim (1). Por exemplo, dada uma matriz A, a função matricial $F(P) = A'P + PA$, que aparece em vários problemas de estabilidade, é afim na variável de decisão P e portanto a desigualdade $F(P) < 0$ é uma LMI que pode ser facilmente reescrita na forma (1) onde g é o vetor contendo os elementos da matriz P a ser determinada. A vantagem da representação genérica afim (1) é que toda LMI pode ser reescrita dessa forma e por isso todos os algoritmos de resolução de LMIs são desenvolvidos para essa representação. No entanto a conversão de uma LMI para a forma afim é feita internamente pelos pacotes computacionais e o usuário não precisa se preocupar com isso. Um breve tutorial sobre como resolver LMIs usando o *parser* YALMIP (***Y****et* ***A****nother* ***LMI*** ***P****arser*) pode ser encontrado no Apêndice B de [5].

Um dos resultados que pode ser tratado via LMIs é mostrado a seguir.

Definição 1 (Estabilidade quadrática)**.** *O sistema* $\dot{x} = Ax$ *é quadraticamente estável se, e somente se, existe uma matriz simétrica* P *tal que as condições*

$$P > 0 \quad (4)$$

$$A'P + PA < 0 \quad (5)$$

são satisfeitas. Em caso afirmativo, $v(x) = x'Px$ *é uma função de Lyapunov para o sistema.* ■

2 O conjunto de soluções de uma LMI é convexo

Seja S o conjunto de todas as soluções possíveis de uma dada LMI, isto é, $S = \{g \ : \ F(g) > 0\}$. É simples verificar que S é um conjunto convexo. Note que se g e h são duas soluções quaisquer da LMI, i.e., $F(g) > 0$ e $F(h) > 0$, então qualquer combinação convexa de g e h, representada por $\alpha g + (1 - \alpha)h$ sendo $0 \le \alpha \le 1$ o coeficiente de combinação convexa, teremos $F(\alpha g + (1-\alpha)h) = \alpha F(g) + (1-\alpha)F(h) > 0$ e portanto $\alpha g + (1-\alpha)h$ também é uma solução da LMI. Logo S é convexo.

Esta propriedade é importante do ponto de vista numérico, pois teremos garantia que o problema de encontrar uma solução qualquer de uma LMI consiste na busca de um elemento qualquer num conjunto convexo, problema que pode ser resolvido de forma eficiente, com convergência global e tempo polinomial. Detalhes sobre algoritmos e pacotes computacionais para resolução de LMIs podem ser encontrados em [3].

3 LMIs para sistemas incertos

Em muitos sistemas podem ocorrer flutuações nos elementos das matrizes do sistema. Isto acarreta flutuações nas matrizes F_i da LMI $F(g) > 0$ em (1).

Exemplo 2. *Considere o sistema linear incerto*

$$\dot{x} = A(\delta)x \quad , \quad \delta \in \Delta \tag{6}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ *é o estado,* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *é o vetor de parâmetros incertos,* Δ *é um politopo conhecido representando os valores admissíveis de* δ *e* $A(\delta)$ *é uma função afim desses parâmetros. Sejam* v_i*,* $i = 1, \ldots, n_v$*, os vértices conhecidos do politopo* Δ*. Queremos verificar a estabilidade do sistema incerto supondo que os valores admissíveis dos parâmetros incertos são definidos pelo politopo* Δ*, mas a taxa de variação desses parâmetros são desconhecidas. Assim, a noção de estabilidade a ser empregada para estudar a estabilidade desse sistemas deve ser tal que não dependa da taxa de variação de* δ*, qualquer que seja esta. A noção de estabilidade que precisamos é a de estabilidade quadrática, da Definição 1, e as condições a serem satisfeitas são*

$$\begin{cases} P > 0 \\ A(\delta)'P + PA(\delta) < 0 \ , \quad \forall \delta \in \Delta \end{cases} \tag{7}$$

As condições anteriores não podem ser numericamente testadas pois dependem do parâmetro incerto δ *que pode assumir qualquer valor em* Δ*. No entanto, como* $F(P, \delta) = A(\delta)'P + PA(\delta)$ *é afim em* δ*, analisando de maneira semelhante à Seção 2, não é necessário resolver* (7) *para todo* δ *em* Δ*, mas apenas para* δ *nos vértices de* Δ*, i.e. para* $\delta = v_i$*,* $i = 1, \ldots, n_v$*. Assim resolver* (7) *para todo* $\delta \in \Delta$ *é equivalente a resolver o conjunto de* $n_v + 1$ *LMIs simultâneas a seguir.*

$$\begin{cases} P > 0 \\ A(v_i)'P + PA(v_i) < 0 \ , \quad i = 1, \ldots, n_v \end{cases} \tag{8}$$

■

4 Otimização com restrições LMI

Em muitos casos não basta encontrar uma solução qualquer do conjunto de soluções de uma LMI. Deseja-se encontrar uma solução que seja ótima segundo um dado critério. Em muitas situações a otimalidade pode ser expressa através de uma função linear dando assim origem ao problema de otimização

$$\begin{cases} \min\limits_{g} \ c'g \quad \text{sujeito a} \\ F(g) > 0 \end{cases} \tag{9}$$

onde c é um vetor dado que define a direção de otimização e $F(g) > 0$ é uma LMI como em (1). Como o conjunto de soluções de $F(g) > 0$ é convexo o problema (9) consiste em encontrar uma solução factível g tal que $F(g) > 0$ para o qual $c'g$ tenha o menor valor possível. Observe que nessas condições a solução ótima do problema consiste em se aproximar com a precisão desejada da fronteira do conjunto de soluções.

Sob certas condições, ver livro [3], é possível considerar restrições de igualdade no problema, isto é, pode-se considerar problemas do tipo $F(g) \geq 0$ ou ainda $F(g) > 0$ com $G(g) = 0$, sendo F e G funções afins. A ideia central é que as restrições de igualdade possam ser eliminadas dando origem a um problema com um número menor de variáveis e sujeitas apenas a restrições com desigualdades estritas.

5 Artifícios usados em LMIs

Embora muitos problemas de controle possam ser formulados como LMIs, alguns destes problemas resultam em desigualdades matriciais não lineares. Felizmente, exitem certos truques que podem ser usados para transformar estas desigualdades não lineares em um formato LMI apropriado. Alguns destes artifícios são descritos nesta seção com exemplos.

5.1 Mudança de variáveis

Definindo novas variáveis, às vezes é possível transformar desigualdades matriciais não lineares em LMIs.

Exemplo 3 (Realimentação de estados)**.** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = Kx \tag{10}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $u \in \mathbb{R}^m$*. O objetivo é determinar uma matriz* $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$*, tal que o sistema em malha fechada seja estável, ou seja que todos os autovalores da matriz* $A + BK$ *estejam no semi-plano esquerdo do plano complexo.*

Usando a teoria de Lyapunov, pode se mostrar que isso é equivalente a encontrar uma matriz K *e uma matriz positiva definida* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que a seguinte desigualdade seja resolvida:*

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0 \tag{11}$$

ou, reescrevendo,

$$A'P + PA + K'B'P + PBK < 0. \tag{12}$$

Note que os termos com produto entre K *e* P *são não lineares (ou bilineares, no caso).*

Considere a mudança de variáveis $Q = P^{-1}$*. Multiplicando* (12) *à esquerda e à direita por* Q *obtém-se*

$$QA' + AQ + QK'B' + BKQ < 0. \tag{13}$$

Esta é uma nova desigualdade matricial com relação a $Q > 0$ *e* K*. Entretanto, continua não linear.*

Considere uma segunda nova variável $Y = KQ$*. Isso resulta em*

$$QA' + AQ + Y'B' + BY < 0. \tag{14}$$

A desigualdade (14) *é uma LMI com relação às variáveis* $Q > 0$ *e* $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$*.*

Depois de resolver a LMI (14)*, a matriz de realimentação K e a matriz de Lyapunov P podem ser recuperadas com $K = YQ^{-1}$ e $P = Q^{-1}$. Isso mostra que a partir de mudanças de variáveis é possível obter LMIs a partir de desigualdades matriciais não lineares.* ■

5.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur é usado na transformação de desigualdades não lineares do tipo convexas em LMIs.

Lema 1 (Complemento de Schur)**.** *Seja $g \in \mathbb{R}^q$ o vetor de variáveis de decisão e $M_1(g)$, $M_2(g)$ e $M_3(g)$ funções afins de g com $M_1(g)$ e $M_2(g)$ simétricas. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) $M_1(g) - M_3(g)'M_2(g)^{-1}M_3(g) > 0$ *com* $M_2(g) > 0$;

(b) $\begin{bmatrix} M_1(g) & M_3(g)' \\ M_3(g) & M_2(g) \end{bmatrix} > 0.$

■

Note que ***(a)*** não é uma LMI pois $M(g) = M_1(g) - M_3(g)'M_2(g)^{-1}M_3(g)$ não é uma função afim em g. No entanto as desigualdades em ***(a)*** são equivalentes a ***(b)***, que é uma LMI. Note que para satisfazer ambas ***(a)*** e ***(b)*** devemos ter $M_1(g) > 0$ e $M_2(g) > 0$ como condições necessárias, porém não suficientes.

Exemplo 4 (Desigualdade de Riccati)**.** *Sejam A, B, C, R matrizes dadas e note que*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C < 0 \quad \text{com} \quad P > 0,\ R > 0 \tag{15}$$

não é uma LMI na variável P, pois é quadrática em P. Nem tampouco o complemento de Schur pode ser aplicado para eliminar o termo quadrático, devido ao sinal deste termo. Note que invertendo o sinal da desigualdade em (15) *obtém-se,*

$$-\left(A'P + PA + C'C\right) + PBR^{-1}B'P > 0 \quad \text{com} \quad P > 0,\ R > 0. \tag{16}$$

Como $R > 0$, o termo quadrático é positivo, não sendo assim possível aplicar o complemento de Schur.

Seja então $S = P^{-1}$, o que implica que $S > 0$. Portanto (15) *é equivalente a*

$$S\left(A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C\right)S < 0 \quad \text{com} \quad S > 0. \tag{17}$$

Como $S = P^{-1}$ tem-se

$$SA' + AS - BR^{-1}B' + SC'CS < 0 \quad \text{com} \quad S > 0. \tag{18}$$

Agora (18) *é quadrática em S e o sinal do termo não linear é coerente com o complemento de Schur, que ao ser aplicado fornece*

$$\begin{bmatrix} -SA' - AS + BR^{-1}B' & SC' \\ CS & I \end{bmatrix} > 0 \quad \text{com} \quad S > 0. \tag{19}$$

Note que (19) *é uma LMI em S e que ao ser resolvida fornece P, pois $P = S^{-1}$ e satisfaz* (15)*.* ■

5.3 Procedimento-S

A técnica que ficou conhecida como "*S-Procedure*" permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Para reduzir o conservadorismo, a técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

Sejam $T_1, \ldots, T_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas dadas e $F(g) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma função afim em g. Considere o seguinte problema: encontre g, se possível, tal que

$$\xi' F(g)\xi > 0 \ , \ \forall \xi \neq 0 \ : \ \xi' T_i \xi \geq 0 \ , \ i = 1, \ldots, p \tag{20}$$

É fácil perceber que se existem escalares $\tau_i, \ i = 1, \ldots, p$ e algum g tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^{p} \tau_i T_i > 0 \tag{21}$$

então (20) está satisfeita. Porém não é trivial mostrar que (20) e (21) são equivalentes para $p = 1$. Existem variantes do Procedimento-S (ver livro [1]).

Exemplo 5 (Sistema limitado em setor)**.** *Considere o sistema não linear*

$$\dot{x} = Ax + B\phi \tag{22}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(q) : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está no setor[3] $[l, u]$*, $q = Cx$, e A, B, C, l e u são matrizes dadas. Se ϕ está limitada no setor $[l, u]$, a seguinte condição está sempre satisfeita:*

$$-(\phi - lq)(\phi - uq) \geq 0. \tag{23}$$

Note que a equação anterior pode ser reescrita como $\xi' T \xi \geq 0$ com

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} \ , \ \ T = \begin{bmatrix} -C'(lu)C & (l+u)/2 \\ (l+u)/2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Considere $v(x) = x'Px$ como candidata a função de Lyapunov e tome sua derivada para a dinâmica do sistema (22) temos as condições a seguir $\forall x \neq 0$.

$$\begin{cases} v(x) = x'Px > 0 \\ \dot{v}(x) = (Ax + B\phi)' Px + x'P (Ax + B\phi) < 0 \ , \quad \forall x, \phi : \ -(\phi - lCx)(\phi - uCx) \geq 0 \end{cases} \tag{25}$$

Defina

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} \ , \ \ T = \begin{bmatrix} -C'(lu)C & (l+u)/2 \\ (l+u)/2 & -1 \end{bmatrix} \ , \ \ F(P) = \begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

e reescreva (25) na forma

$$\begin{cases} P > 0 \\ \xi' F(P) \xi < 0 \ , \ \forall \xi : \ \xi' T \xi \geq 0 \end{cases} \tag{27}$$

[3] A função não linear $\phi(q)$ está confinada entre a reta limitante inferior $\phi = lq$ e a reta limitante superior $\phi = uq$.

que pelo Procedimento-S é equivalente a

$$\begin{cases} P > 0 \\ \tau \geq 0 \\ F(P) + \tau T < 0 \end{cases} \tag{28}$$

que é uma condição de estabilidade equivalente à (25) em forma de LMI. Note que $F(P) < 0$ na condição (27) também é uma LMI, entretanto esta implica que $\xi' F(P) \xi < 0, \ \forall \xi \neq 0$, o que pode ser conservador. Além disso, observando a estrutura de $F(P)$ em (26), há um zero na diagonal principal, o que torna impossível que $F(P)$ seja estritamente negativa definida, pois $F(P)$ é simétrica. Por outro lado, $F(P) + \tau T < 0$ em (28) é uma condição menos conservadora (note que a matriz T introduz um termo negativo na diagonal principal nula). ■

Nota 1. *Perceba que o escalar τ no Exemplo 5 pode ser uma variável a determinar, pois T não contém variáveis de decisão. Caso contrário, τ deve ser fixado pelo projetista.* ■

5.4 Lema de Finsler

Este lema é muito útil pois permite que restrições de igualdade sejam inseridas em uma única desigualdade que pode ser resolvida via LMI.

Lema 2 (Lema de Finsler)**.** *Seja $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz dada e C_0 uma base para o espaço nulo de C. Seja $F(g)$ uma função afim em $g \in \mathbb{R}^q$ com $F(g) = F'(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\exists g : \ x' F(g) x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \ Cx = 0, \ x \neq 0$;

(b) $\exists g, L : \ F(g) + LC + C'L' < 0, \quad L \in \mathbb{R}^{n \times m}$;

(c) $\exists g : \ C_0' F(g) C_0 < 0$;

(d) $\exists g, \alpha : \ F(g) - \alpha C'C < 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

■

Algumas relações são facilmente verificadas. Por exemplo, a equivalência entre ***(c)*** e ***(a)*** é imediata uma vez que todo $x : \ Cx = 0$ possui a forma $x = C_0 y$ para algum y. Que ***(b)*** e ***(d)*** implicam em ***(a)*** também é imediato, uma vez que ***(b)*** e ***(d)*** implicam

$$\begin{cases} x' \left(F(g) - \alpha C'C \right) x < 0 \\ x' \left(F(g) + LC + C'L' \right) x < 0 \end{cases} \qquad \forall x \neq 0 \tag{29}$$

Logo, para $Cx = 0$ recuperamos ***(a)***. As demais relações possuem prova não trivial e podem ser encontradas em [2] e suas referências. Existem variações do Lema de Finsler conhecidas por outros nomes, como Lema da Projeção e Lema da Eliminação de Variáveis, bastante conhecidas na teoria de controle $\mathcal{H}_\infty$.

Exemplo 6 (Sistema Algébrico-Diferencial). *Considere o sistema Algébrico-Diferencial*

$$\dot{x} = A_1 x + A_2 z \tag{30}$$
$$0 = A_3 x + A_4 z \tag{31}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$*,* A_1, A_2, A_3, A_4 *são matrizes dadas, com* A_4 *inversível, e* $z \in \mathbb{R}^m$ *é um vetor de variáveis algébricas.*

A estabilidade desse sistema pode ser analisada com o auxílio da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$ *de duas formas equivalentes.*

(a) *Com eliminação da variável algébrica* $z = -A_4^{-1}A_3 x$*:*

$$\dot{x} = \left(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3\right) x \tag{32}$$

que por sua vez leva às seguintes condições

$$\exists P > 0 \ : \ \left(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3\right)' P + P \left(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3\right) < 0. \tag{33}$$

Entretanto, para sistemas incertos, onde as matrizes A_1, A_2, A_3, A_4 *possuem elementos incertos, a condição* (33) *é trabalhosa, pois o termo* $A_2 A_4^{-1} A_3$ *não é afim nos elementos incertos em geral.*

(b) *Sem eliminação da variável algébrica.*

Tomando a derivada de $v(x) = x'Px$ *para o sistema* (30) *temos as condições a seguir.*

$$\begin{cases} v(x) = x'Px > 0 \ , \ \forall x \neq 0 \\ \dot{v}(x) = (A_1 x + A_2 z)' Px + x'P(A_1 x + A_2 z) < 0 \ , \ \forall x \neq 0 \ \ e \ \ \forall z : \ A_3 x + A_4 z = 0 \end{cases} \tag{34}$$

Defina

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \ , \quad C = \begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} \ , \quad F(P) = \begin{bmatrix} A_1'P + PA_1 & PA_2 \\ A_2'P & 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

e reescreva (34) *na forma*

$$\begin{cases} P > 0 \\ \xi' F(P) \xi < 0 \ , \ \forall \xi : \ C\xi = 0 \end{cases} \tag{36}$$

que pelo Lema de Finsler é equivalente a

$$\begin{cases} P > 0 \\ F(P) + LC + C'L' < 0 \end{cases} \tag{37}$$

que é uma condição de estabilidade equivalente à (34)*, porém as matrizes* A_1, A_2, A_3, A_4 *aparecem linearmente na expressão* $F(P) + LC + C'L'$ *e o caso onde estas matrizes possuem elementos incertos pode ser tratado como na Seção 3.* ■

Referências

[1] S. Boyd, L. EL GHAOUI, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 86. SIAM, Philadelphia, USA, December 1994.

[2] M. C. DE OLIVEIRA and R. E. Skelton. Stability tests for constrained linear systems. In S. O. R. Moheimani, editor, *Perspectives in Robust Control Design*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 241–257. Springer-Verlag, London, United Kingdom, 2001.

[3] L. EL GHAOUI and S. I. Niculescu. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. SIAM, Philadelphia, USA, 2000.

[4] A. Trofino, D. Coutinho, and K. A. Barbosa. Sistemas multivariáveis: uma abordagem via LMIs. Apostila do curso de Controle Robusto. Disponível em: `http://www.das.ufsc.br/trofino`, 201X.

[5] J. Zhang, A. Swain, and S. K. Nguang. *Robust Observer-Based Fault Diagnosis for Nonlinear Systems Using MATLAB*. Springer, 2016.