Controle via observador de estados

Prof. Tiago Dezuo

Uma das formas de controle por realimentação de saída consiste em utilizar as variáveis medidas para estimar o estado através de um observador e construir o sinal de controle através de uma realimentação do estado estimado. Tanto o observador quanto o ganho de realimentação são projetados com as técnicas apresentadas anteriormente. Neste material veremos sob quais condições o sistema de malha fechada projetado dessa forma é estável.

1 Princípio da separação

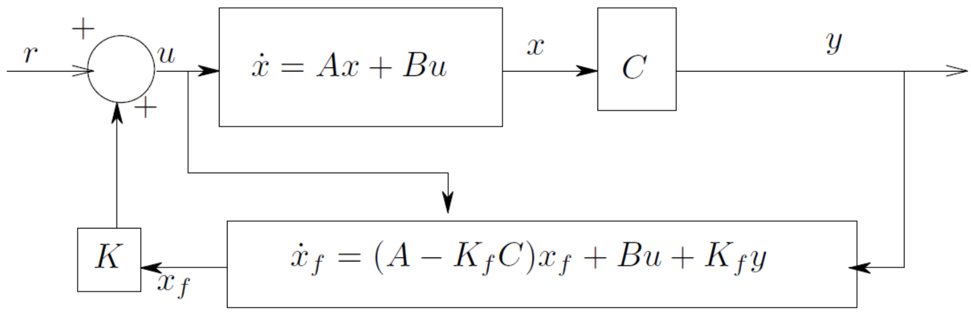

Figura 1: Realimentação dos estados observados.

Considere o esquema de controle ilustrado no diagrama da Figura 1 e observe que podemos representá-lo pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{x}_f(t) &= (A - K_f C)\, x_f(t) + Bu(t) + K_f y(t) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} u(t) &= Kx_f(t) + r(t) \\ y(t) &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado do sistema a ser controlado, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de medidas, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de controle, $x_f \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor dos estados estimados, $r \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de referência e A, B, C, K, K_f são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Utilizando como variáveis de estado os vetores $x(t)$ e o erro de estimação $e(t) = x(t) -$

$x_f(t)$, o sistema (1) em malha fechada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-K_fC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r \tag{2}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \tag{3}$$

Os autovalores da matriz de dinâmica do sistema de malha fechada são dados pela equação característica indicada abaixo[1].

$$\begin{aligned} \det\left(sI_{2n} - \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-K_fC \end{bmatrix}\right) &= \\ \det\left(\begin{bmatrix} sI_{2n}-(A+BK) & -BK \\ 0 & sI_{2n}-(A-K_fC) \end{bmatrix}\right) &= \\ \det\left(sI_{2n}-(A+BK)\right)\cdot\det\left(sI_{2n}-(A-K_fC)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Assim vemos que a dinâmica do sistema de malha fechada é regida pelos autovalores das matrizes $A+BK$ e $A-K_fC$, que devem estar todos no semi-plano complexo esquerdo para que o sistema realimentado seja estável. Os autovalores de $A-K_fC$ definem a dinâmica do erro de estimação de estados, como pode ser visto a partir de (2). Por outro lado, os autovalores de $A+BK$ podem ser interpretados como os autovalores dominantes pois são esses autovalores que definem a dinâmica do sistema realimentado quando o erro de estimação de estados é nulo. Tipicamente a dinâmica do erro de estimação é escolhida de duas a cinco vezes mais rápida que a dinâmica dominante representada pelos autovalores de $A+BK$. Em resumo, o projeto de controladores baseados em observadores de estado pode ser realizado da seguinte maneira:

1. Projetar a matriz de realimentação de estados $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ utilizando as técnicas propostas anteriormente;
2. Projetar a matriz de ganhos do observador $K_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ utilizando os resultados apresentados anteriormente;
3. Utilizar a estrutura de controle proposta na Figura 1.

Observe que o projeto do ganho de controle e do observador são independentes. Esta propriedade é conhecida na literatura por *Princípio da Separação.*

O princípio da separação também se aplica a observadores de ordem reduzida.

Veja na Figura 2 que podemos interpretar o controle baseado em observador como um controlador de mesma ordem do sistema de malha aberta.

2 Efeito de ruídos e distúrbios externos

Ruídos de medida e distúrbios externos sempre estão presentes num problema prático. Nesta seção iremos verificar o efeito desses sinais indesejados no desempenho do sistema de controle

[1] A notação I_m indica a matriz identidade de dimensão $m \times m$.

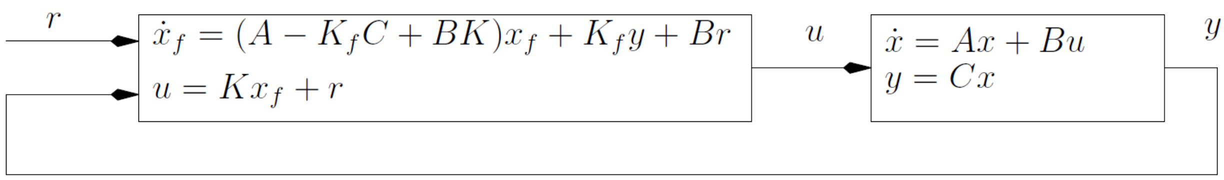

Figura 2: Controlador baseado em um observador.

baseado em observador. Para esse fim considere o sistema de controle cuja representação de estados está indicada a seguir.

$$\begin{array}{lcl} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_d d(t) & , & u(t) = Kx_f(t) \\ \dot{x}_f(t) = (A - K_f C)\, x_f(t) + B_u u(t) + K_f y(t) & & y(t) = Cx + v(t) \end{array} \tag{5}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado do sistema a ser controlado, $x_f \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor dos estados estimados, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de medidas, $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ é o vetor de distúrbios externos, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ é o vetor de ruídos de medição, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de controle e A, B_u, B_d, C, K, K_f são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Utilizando como variáveis de estado os vetores $x(t)$ e o erro de estimação $e(t) = x(t) - x_f(t)$, o sistema (5) em malha fechada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d d \\ B_d d - K_f v \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + v \tag{7}$$

Da equação acima podemos verificar que a presença de ruídos e distúrbios não mudam a matriz de dinâmica do sistema e seus autovalores continuam sendo dados por (4). Como o sistema é projetado para ser estável, concluímos de (6) que ruídos e distúrbios funcionam como referências indesejadas que o sistema de malha fechada será forçado a seguir. Na presença de ruídos e distúrbios o erro de estimação não será nulo já que a dinâmica do erro é excitada não só pela condição inicial $e(0)$, mas também por $d(t)$ e $v(t)$ como se vê na expressão abaixo.

$$\dot{e} = (A - K_f C)e + B_d d - K_f v \tag{8}$$

Observe ainda que a matriz K_f de ganho do observador é também a matriz de entrada do ruído de medida. Assim, se aumentamos o ganho K_f para acelerar a convergência do erro de estimação de estados, estamos também forçando o erro de estimação a seguir um ruído agora amplificado por K_f. Por esse motivo observadores de estados com ganhos elevados tem pouco interesse na prática.

Outro motivo para se evitar grandes ganhos no observador é que o sinal de controle, que é dado por $u(t) = Kx_f(t) = K(x(t) - e(t))$, pode saturar se o erro atingir valores elevados.

As mesmas conclusões acima se aplicam para observadores de ordem reduzida. Estes, porém, possuem uma dificuldade adicional. No observador de ordem completa, a função de transferência do ruído para o erro de estimação é estritamente própria.

$$E(s) = (sI_n - (A - K_f C))^{-1} (B_d D(s) - K_f V(s)) \tag{9}$$

Isto implica que teremos uma atenuação nas altas frequências de no mínimo 20 dB/década. No observador de ordem reduzida pode ocorrer amplificação nas altas frequências já que o erro de estimação $e(t) = w(t) - w_e(t)$ é dado por

$$\dot{e}(t) = A_f e(t) + (B_4 - G_f B_3)d(t) + A_f G_f v(t) - G_f \dot{v}(t) \quad , \quad TB_d = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

onde B_d é a matriz de entrada da perturbação $d(t)$ como indicado em (5), T é a transformação que caracteriza o observador de ordem reduzida e $w_e(t)$ é a estimativa de ordem reduzida. Da expressão anterior obtemos a função de transferência

$$E(s) = \left(sI_{n-n_y} - A_f)\right)^{-1} ((B_4 - G_f B_3)D(s) + A_f G_f V(s) - G_f sV(s)) \tag{11}$$

de onde notamos que o termo $-\left(sI_{n-n_y} - A_f)\right)^{-1} G_f sV(s)$ pode provocar amplificações do ruído $V(s)$ nas altas frequências. Isto é altamente indesejável na prática pois, ao aumentar a banda passante do sistema, estamos permitindo amplificações de dinâmicas não modeladas que podem causar deterioração no desempenho do sistema ou mesmo problemas de instabilidade. Por esses motivos a utilização de observadores de Luenberger de ordem reduzida para fins de controle tem aplicação limitada na prática.

Finalmente observe que se o distúrbio $d(t)$ é conhecido em tempo real, por exemplo através de medições, então podemos interpretá-lo como um sinal de referência e incorporá-lo no observador. Este procedimento é análogo ao dado para o sinal $r(t)$ na Seção 1.

3 Rastreamento

Suponha agora que os ruídos e distúrbios sejam desprezíveis e que desejamos resolver o problema de rastreamento, porém agora utilizando um controlador baseado em observador ao invés da realimentação de estados. A solução desse problema é imediata com o auxílio do princípio da separação.

No caso do rastreamento com ajuste de ganho estático basta projetar um observador e substituir a realimentação de estados $u = -Kx$ pela realimentação de estados estimados $u = -Kx_f$, como indicado na Figura 3. Nesse caso a inserção do observador não altera o ganho estático $G(0)$, calculado para realimentação de estados. Isso ocorre porque em regime permanente o erro de estimação de estados é nulo, isto é, $x = x_f$. Assim a matriz F de ajuste é idêntica à obtida para realimentação de estados.

$$F = G(0)^{-1} \quad , \quad G(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B + D \tag{12}$$

No caso do rastreamento com integradores os argumentos são similares. Basta projetar um observador e substituir a realimentação de estados $u = -K_e x$ pela realimentação de

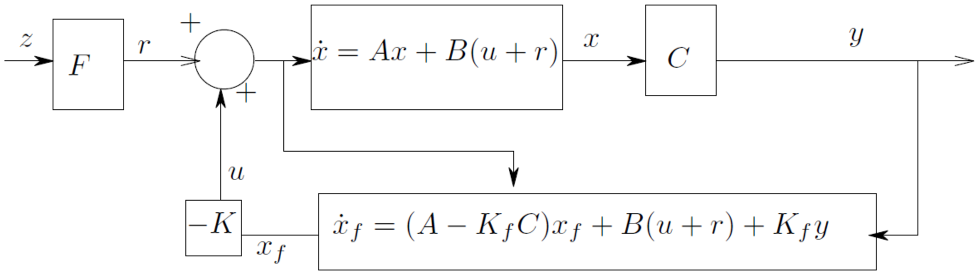

Figura 3: Rastreamento com correção de ganho estático e observador.

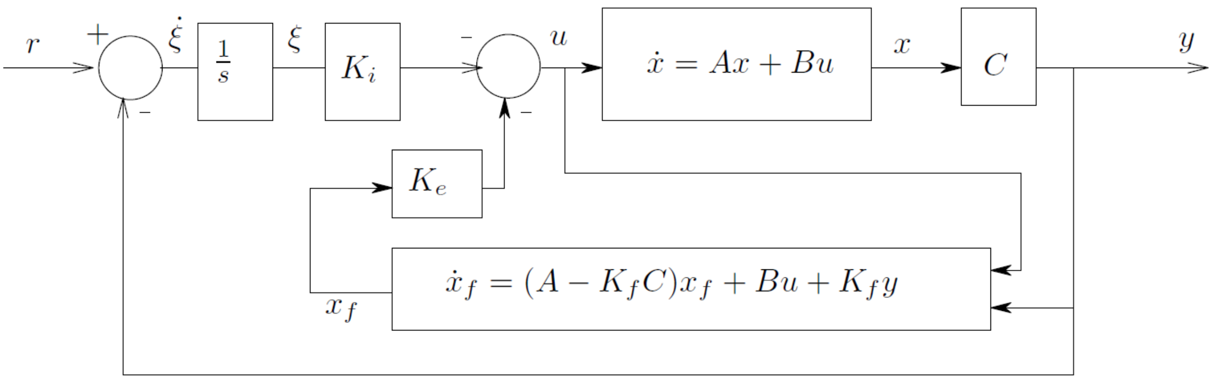

Figura 4: Rastreamento com integradores.

estados estimados $u = -K_e x_f$, como indicado na Figura 4. Nesse caso, as equações do sistema de controle são dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a - B_a K_a & BK_e \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_a \\ 0 \end{bmatrix} r \tag{13}$$

onde $e = x - x_f$ é o erro de estimação de estados, K_f é o ganho do observador e

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_a = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad K_a = \begin{bmatrix} K_e & K_i \end{bmatrix} \tag{14}$$

O problema a ser resolvido consiste então em determinar K_f e K_a de tal forma que os autovalores de $A_a - B_a K_a$ e $A - K_f C$ estejam no semi-plano complexo esquerdo. Com o princípio da separação podemos projetar o ganho K_f de forma independente do projeto da matriz de ganhos K_a.

Observe que em regime permanente o erro de estimação de estados é nulo, isto é $x = x_f$. Logo, em regime permanente, o esquema de controle baseado em observador acima se torna idêntico ao esquema baseado em realimentação de estados. Entretanto, devido à sensibilidade do observador em relação a mudanças no ponto de equilíbrio, podemos esperar um menor grau de robustez do esquema acima (em relação ao de realimentação de estados) para mudanças no ponto de equilíbrio.