Observadores de estados de ordem reduzida

Prof. Tiago Dezuo

No módulo anterior estudamos o observador de ordem completa, onde uma estimativa das variáveis de estado é obtida a partir de um filtro que possui a mesma dimensão do sistema cujo estado desejamos estimar. Como algumas variáveis de estado do sistema podem ser obtidas diretamente dos medidores, podemos pensar em estimar apenas aquelas variáveis para as quais não dispomos de medidores. Nesse caso o filtro que estima esse sub-conjunto de variáveis não medidas terá dimensão menor que a do sistema original e recebe o nome de observador de ordem reduzida. Para melhor formular o problema considere que $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^m$ são as m variáveis medidas e que $w(t) = Rx(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ são as variáveis restantes para as quais não dispomos de medidores. As matrizes C e R são as matrizes de ganhos dos medidores disponíveis (C) e não disponíveis (R). Esta última pode ser arbitrariamente escolhida pois representa ganhos fictícios. Para não haver medidas redundantes as linhas das matrizes C e R não podem ser linearmente dependentes, ou seja a matriz T abaixo deve ser inversível.

$$T = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{1}$$

Note que as variáveis y, w formam um novo conjunto de variáveis de estado para o sistema. Isto se consegue com a mudança de variável

$$z(t) = Tx(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Efetuando a transformação de similaridade acima encontramos

$$\dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \tag{3}$$
$$y(t) = CT^{-1}z(t) \tag{4}$$

e para separar as dinâmicas das variáveis $y(t)$ que medimos e $w(t)$ que iremos estimar, consideraremos a seguinte partição:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Assim vemos que a dinâmica das variáveis que desejamos estimar é regida pela equação diferencial

$$\dot{w}(t) = A_{22}w(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t) \tag{6}$$

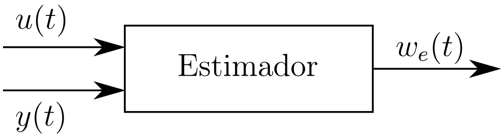

Figura 1: Diagrama de blocos de um estimador de estados genérico.

Agora desejamos obter uma estimativa $w_e(t)$ do sinal $w(t)$ através de um filtro dinâmico cujas entradas são os sinais conhecidos $y(t)$, $u(t)$ e cuja saída é a estimativa $w_e(t)$, como ilustra a Figura 1. Uma representação de estados genérica desse filtro é

$$\dot{w}_f(t) = A_f w_f(t) + B_f u(t) + C_f y(t) \tag{7}$$
$$w_e(t) = w_f(t) + G_f y(t) \tag{8}$$

onde as matrizes A_f, B_f, C_f, G_f devem ser determinadas tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(i) A estimativa $w_e(t)$ deve convergir para $w(t)$ em regime permanente, i.e.

$$\lim_{t\to\infty} (w(t) - w_e(t)) = 0 \tag{9}$$

(ii) A dinâmica do erro de estimação $e(t) = w(t) - w_e(t)$ deve depender apenas da condição inicial $e(0) = w(0) - w_e(0)$.

Como visto no módulo anterior, um filtro que satisfaz as condições acima é denominado de observador de Luenberger. O observador é denominado de ordem reduzida quando o estado $w_f(t)$ do observador possui dimensão inferior à do estado $x(t)$ que se deseja estimar. Dizemos que o observador é de ordem mínima quando o estado $w_f(t)$ do observador possui dimensão igual a $n - m$.

O requisito **(i)** indica que não existe erro de estimação em regime permanente enquanto **(ii)** indica que o erro de estimação não depende dos sinais de entrada do filtro $y(t)$, $u(t)$ e, portanto, o projeto do observador e da lei de controle ficam independentes.

Observe que num observador de ordem completa o estado do observador é o próprio estado estimado. Porém isso não ocorre num observador de ordem reduzida onde o estado do observador é a variável w_f e a parcela do estado estimada é $w_e = w_f + G_f y$.

Para determinar as matrizes do filtro, observe que a dinâmica do erro $e(t) = w(t) - w_e(t)$ é dada por

$$\dot{e}(t) = \dot{w}(t) - \dot{w}_e(t) = A_{21}y(t) + A_{22}w(t) + B_2u(t) - (G_f\dot{y}(t) + \dot{w}_f(t)) \tag{10}$$

e como pode ser visto de (3), (4) e (5) temos $\dot{y}(t) = A_{11}y(t) + A_{12}w(t) + B_1u(t)$. Logo,

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) = A_{21}y(t) + A_{22}w(t) + B_2u(t) - G_f\left(A_{11}y(t) + A_{12}w(t) + B_1u(t)\right)\\ - A_f w_f(t) - C_f y(t) - B_f u(t)\end{aligned} \tag{11}$$

Como $e(t) = w(t) - w_e(t) = w(t) - G_f y(t) - w_f$ temos

$$\dot{e}(t) = A_f e(t) + (A_{21} - G_f A_{11} - C_f + A_f G_f)\, y(t) + \\ (A_{22} - G_f A_{12} - A_f)\, w(t) + (B_2 - G_f B_1 - B_f)\, u(t) \quad (12)$$

Para satisfazer o requisito **(ii)** devemos escolher

$$A_f = A_{22} - G_f A_{12}\ , \quad B_f = B_2 - G_f B_1\ , \quad C_f = A_{21} - G_f A_{11} + A_f G_f \quad (13)$$

que resulta no observador de ordem mínima dado por

$$\dot{w}_f(t) = A_f w_f(t) + (B_2 - G_f B_1) u(t) + (A_{21} - G_f A_{11} + A_f G_f) y(t) \quad (14)$$

$$w_e(t) = G_f y(t) + w_f(t) \qquad , \qquad A_f = A_{22} - G_f A_{12} \quad (15)$$

que fornece uma estimativa $w_f(t)$ e cuja dinâmica de erro de estimação é dada por

$$\dot{e}(t) = (A_{22} - G_f A_{12})\, e(t) \quad , \quad e(t) = w(t) - w_e(t) \quad (16)$$

Para que o requisito **(i)** seja atingido a matriz de ganho G_f do observador deve ser projetada de tal forma que os autovalores da matriz $A_{22} - G_f A_{12}$ estejam todos no semi-plano complexo esquerdo.

Finalmente observe que o problema original era encontrar uma estimativa $x_f(t)$ para o estado do sistema estimando apenas a variável $w(t)$ para a qual não dispomos de medidores. Usando a relação (2) temos

$$x_f(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ w_e(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde $w_e(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$ é a estimativa dada pelo observador de ordem mínima (14), (15).