

Observadores de estados

Prof. Tiago Dezuó

Nos módulos anteriores vimos que podemos projetar um controlador para que os polos do sistema de malha fechada estejam nas posições desejadas pelo projetista. Para isso, é preciso que o sistema seja controlável e que possamos medir todas as variáveis de estado do sistema através de instrumentos. No entanto, na prática, nem sempre dispomos de instrumentos para a medição de todas as variáveis de estados, seja pela falta de equipamentos apropriados (sensores), ou ainda pelo elevado custo da instrumentação requerida. Uma forma de contornar essa dificuldade consiste em estimar as variáveis de estado e utilizar essas estimativas para construir o sinal de controle.

Além de estimar as variáveis de estado, outro ponto importante é atenuar o máximo possível a influência dos ruídos de medição e perturbações externas do sistema nas variáveis estimadas.

Neste módulo, veremos como projetar dispositivos para estimação das variáveis de estado, chamados de observadores de estado, e analisar o efeito de ruídos e perturbações externas na estimativa obtida. O projeto de controladores que utilizam as variáveis estimadas será estudado em um módulo posterior.

1 Observador de ordem completa

Consideraremos o problema de estimar todas as variáveis de estado de um sistema a partir dos sinais conhecidos disponíveis nesse sistema. Para isso admitiremos que o sistema seja descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a variável de controle que suporemos conhecida¹ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída do sistema proveniente dos medidores e suporemos que não existe redundância nas variáveis medidas, isto é, $\text{posto}(C) = n_y$.

Observe que se o número de sensores for igual ao número de variáveis de estado ($n_y = n$) e as medidas efetuadas não são redundantes (a matriz C é inversível), então podemos determinar o estado através da relação algébrica $x(t) = C^{-1}y(t)$. No entanto, na grande maioria dos casos não dispomos de sensores para todas as variáveis de estado e nesses casos temos $n_y < n$, implicando que a matriz C não é inversível e portanto não mais podemos encontrar o estado através da relação algébrica acima. A solução nesses casos é obter uma

¹Como mencionado anteriormente os métodos de projeto de controladores que utilizam as variáveis de estado estimadas serão estudados em módulos posteriores.

estimativa $x_f(t)$ do sinal $x(t)$ através de um filtro dinâmico cujas entradas são os sinais conhecidos do sistema $y(t)$ e $u(t)$ e cuja saída é a estimativa $x_f(t)$, como ilustra a Figura 1.

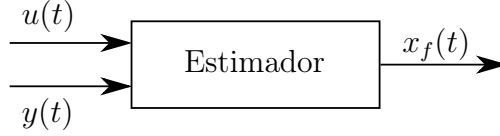


Figura 1: Diagrama de blocos de um estimador de estados.

A representação de estados desse filtro é indicada abaixo.

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u(t) + K_f y(t) \quad (2)$$

onde as matrizes A_f , B_f , K_f devem ser determinadas tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) A estimativa $x_f(t)$ deve convergir para $x(t)$ em regime permanente, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_f(t)) = 0 \quad (3)$$

- (ii) A dinâmica do erro de estimação $e(t) = x(t) - x_f(t)$ deve depender apenas da condição inicial $e(0) = x(0) - x_f(0)$.

Um filtro que satisfaz as condições acima é denominado de observador de Luenberger. O observador é denominado de ordem completa quando o estado $x_f(t)$ do observador possui dimensão igual a do estado $x(t)$ que se deseja estimar.

O requisito (i) indica que não existe erro de estimação em regime permanente, enquanto (ii) indica que o erro de estimação não depende dos sinais de entrada do filtro $y(t)$, $u(t)$ e portanto o projeto do observador e da lei de controle ficam independentes.

Para determinar as matrizes do filtro que satisfazem as condições acima, basta calcular a dinâmica do erro de estimação $e(t) = x(t) - x_f(t)$ que nos leva a:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_f \quad (4)$$

$$= Ax + Bu - [A_f x_f + B_f u + K_f y] \quad (5)$$

$$= (A - K_f C)x + (B - B_f)u - A_f x_f \quad (6)$$

$$= (A - K_f C)(e + x_f) + (B - B_f)u - A_f x_f \quad (7)$$

$$= (A - K_f C)e + (B - B_f)u + (A - K_f C - A_f)x_f \quad (8)$$

Para que o requisito (ii) seja atendido devemos escolher

$$A_f = A - K_f C \quad , \quad B_f = B \quad (9)$$

o que resulta na seguinte dinâmica do erro de estimação

$$\dot{e} = (A - K_f C)e \quad (10)$$

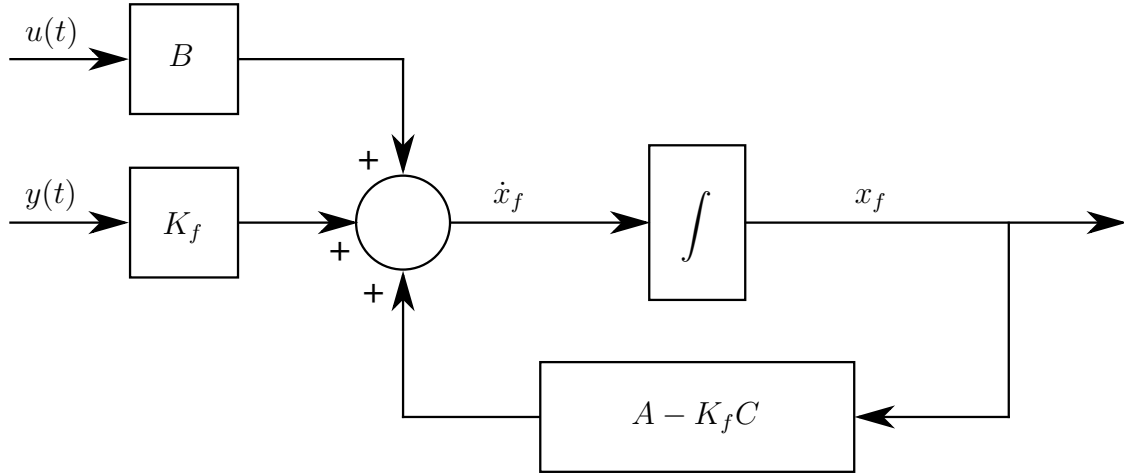


Figura 2: Observador de ordem completa para o sistema (1).

e num filtro, conhecido como observador de Luenberger de ordem completa, dado pela equação abaixo e ilustrado na Figura 2.

$$\dot{x}_f(t) = (A - K_f C)x_f(t) + Bu(t) + K_f y(t) \quad (11)$$

Por outro lado, para que o requisito (i) seja atendido devemos escolher a matriz K_f , conhecida como ganho do observador, de tal forma que os autovalores da matriz $A - K_f C$, que define a dinâmica do erro de acordo com (10), tenham todos parte real negativa, pois dessa forma teremos

$$e(t) = \exp \{ (A - K_f C)t \} e(0) \quad \text{com} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall e(0) \quad (12)$$

2 Técnicas para projeto do ganho do observador

O problema que queremos estudar consiste em projetar a matriz K_f de ganho do observador de tal forma que os autovalores da matriz $A - K_f C$ estejam no semi-plano complexo esquerdo. Observe que este problema é similar ao problema de projeto de realimentação de estados estudado nas experiências anteriores, onde apresentamos técnicas para determinar uma matriz K tal que os autovalores da matriz $A - BK$ estejam no semi-plano complexo esquerdo. A única diferença é a localização das matrizes K e K_f , a serem determinadas, em relação às matrizes constantes B e C e isto impede que as mesmas técnicas de posicionamento de polos sejam usadas diretamente. No entanto, essa dificuldade pode ser eliminada notando que os autovalores de $A - K_f C$ são os mesmos da sua transposta $A' - C' K'_f$ onde agora K'_f e K aparecem na mesma posição. Portanto podemos estabelecer a correspondência apresentada na Tabela 1.

A Tabela 1 indica que se definirmos um sistema de controle auxiliar fictício, chamado de sistema dual, na forma

$$\dot{e}_d = A' e_d + C' u_d \quad , \quad u_d = -K'_f e_d \quad (13)$$

Tabela 1: Correspondência entre projeto de controlador e de observador.

projeto de controlador	\leftrightarrow	projeto de observador
A	\leftrightarrow	A'
B	\leftrightarrow	C'
K	\leftrightarrow	K'_f

onde e_d, u_d são o estado dual e controle dual, respectivamente. Assim, podemos utilizar as mesmas técnicas de projeto de realimentação de estados para encontrar a matriz de ganho K_f tal que o sistema dual acima em malha fechada $A' - C'K'_f$ seja estável.

Note que controlabilidade no sistema dual (13) significa observabilidade do par (A, C) , o que indica observabilidade do sistema original. Isto decorre do fato de que a matriz de controlabilidade do par (A', C') é a transposta da matriz de observabilidade do par (A, C) .

3 Projeto por alocação de polos

Para determinação de K_f via alocação de polos, sabemos que o par (A', C') precisa ser controlável, ou de forma equivalente (A, C) observável. Os resultados dos módulos de projeto de realimentação de estados e seguimento de referência se aplicam diretamente para a solução do problema fictício de controle por realimentação de estados do sistema dual (13).

Exemplo 1. Considere o problema de projetar um observador para o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, onde o vetor de medidas é $y = Cx$ e as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Queremos que os polos de malha fechada do sistema sejam $\{-3, -6\}$. Calcularemos a matriz de ganhos K_f do observador usando os métodos SISO e MIMO de forma análoga ao exemplo do módulo sobre realimentação de estados.

Pelo método para sistemas SISO:

Equação característica de malha aberta:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 = 0 \implies \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Equação característica desejada:

$$(s + 3)(s + 6) = s^2 + 9s + 18 = 0 \implies \begin{cases} \alpha_1 = 9 \\ \alpha_2 = 18 \end{cases} \quad (16)$$

Usando o método visto anteriormente, temos:

$$K'_f = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Note que A', C' não se encontram na forma canônica de controlabilidade A_c, B_c e por isso a transformação $T = M_c M_{cc}^{-1}$ se faz necessária. Note que $M_c = \begin{bmatrix} C' & A'C' \end{bmatrix} = I_2$ para este exemplo e M_{cc} é a matriz de controlabilidade do sistema na forma canônica de controlabilidade.

Pelo método para sistemas MIMO:

$$\begin{bmatrix} A' - \lambda_i I_2 & -C' \end{bmatrix} g_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda_i & 0 \end{bmatrix} g_i = 0 \quad (18)$$

Os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -6$ são $g_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3 \end{bmatrix}'$ e $g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & 6 \end{bmatrix}'$. Desta forma, temos

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/3 & -1/6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ G \end{bmatrix} \quad (19)$$

Assim, $K'_f = GV^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \end{bmatrix}$.