Realimentação de estados com alocação de polos

Prof. Tiago Dezuo

O projeto de controladores para sistemas dinâmicos visa estabilizar o sistema em malha fechada e em geral deve-se satisfazer restrições adicionais como, por exemplo, resposta transitória, rejeição de perturbações e limitações no sinal de controle. Podemos classificar as estruturas de controle de acordo com o tipo de informação que é injetada no controlador. Quando o sinal de controle é construído com informações dos medidores de todas as variáveis de estado dizemos que o controle é de realimentação de estados. Quando o sinal de controle é construído com informações dos medidores de um subconjunto das variáveis de estado, que chamaremos de variáveis de saída, dizemos que o controle é de realimentação de saída. Como na grande maioria dos casos não é possível (ou economicamente inviável) medir todas as variáveis de estado, a realimentação de saída é a solução mais comum na prática. No entanto, a realimentação de estados possui propriedades importantes e, além disso, veremos nos próximos capítulos que podemos construir um controlador de saída a partir da realimentação de estados simplesmente estimando as variáveis de estado para as quais não temos medidores disponíveis.

Nesta experiência estudaremos técnicas de projeto de realimentação de estados. Para precisar o problema que gostaríamos de resolver, considere o seguinte sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o sinal de controle, A e B são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Suponha que dispomos de medidores para todas as variáveis de estado. Gostaríamos de determinar uma lei de controle do tipo $u(t) = Kx(t)$, onde $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ é a matriz de ganhos de realimentação a ser determinada, de tal forma que o sistema em malha fechada satisfaça os seguintes requisitos: **(i)** o regime permanente seja atingido, isto é, o sistema seja exponencialmente estável e **(ii)** que a resposta transitória satisfaça certos critérios de desempenho definidos pela localização desejada dos polos do sistema realimentado.

Observe que a todo instante de tempo o valor das variáveis de estado $x(t)$ está disponível na saída dos medidores e portanto o sinal de controle $u(t) = Kx(t)$ pode ser aplicado instantaneamente nos atuadores do sistema. Por exemplo, para um sistema que possui dois atuadores com sinais de controle u_1 e u_2 e quatro estados com valores medidos x_1, x_2, x_3, x_4, teríamos

$$u_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + k_{14}x_4 \tag{2}$$
$$u_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + k_{24}x_4 \tag{3}$$

onde as constantes k_{ij} são os ganhos de realimentação a serem determinados. Na forma matricial $u(t) = Kx(t)$ as expressões acima se tornam

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Observe que o sinal da realimentação está atrelado aos ganhos k_{ij} a serem determinados.

Observe ainda que o sistema (1) em malha fechada com a lei de controle $u(t) = Kx(t)$ é dado por

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \tag{5}$$

e para que ele seja exponencialmente estável todos os autovalores da matriz $(A+BK)$ devem estar no semi-plano complexo esquerdo estrito, isto é, devem ter parte real estritamente negativa.

Nas seções seguintes apresentamos vários métodos para determinação da matriz de ganhos K que estabiliza o sistema em malha fechada e que atende a um conjunto de critérios de desempenho que desejamos satisfazer.

1 Projeto por alocação de polos

Queremos nesta seção desenvolver métodos de projeto para a determinação da matriz de ganhos K da realimentação de estados $u(t) = Kx(t)$ de tal forma que os polos do sistema realimentado (5) estejam localizados em posições do plano complexo que podem ser arbitrariamente escolhidas pelo projetista.

A motivação para resolver o problema acima, conhecido como alocação de polos, vem do fato de que a localização dos polos de malha fechada define a estabilidade e está fortemente ligada ao comportamento transitório do sistema. Assim, basta o projetista escolher adequadamente a localização dos polos de malha fechada que o sistema de controle irá funcionar como desejado tanto em regime permanente como durante o transitório. Observe entretanto que o transitório depende também dos zeros do sistema e não apenas dos polos. Para acomodar a influência dos zeros, o projeto de alocação de polos é feito tipicamente de forma iterativa até que os requisitos de resposta durante o transitório sejam atingidos nas simulações.

Para que possamos projetar os ganhos de realimentação de forma a atingir o desempenho desejado (a ser definido pelo projetista através da escolha dos polos de malha fechada) o sistema de malha aberta precisa ser controlável [1].

Quando o sistema de malha aberta é controlável podemos escolher a localização dos polos de malha fechada de forma arbitrária que sempre podemos encontrar uma realimentação de estados que modifica os polos da forma desejada. O projeto dos ganhos de realimentação é bastante simples no caso de sistemas com uma entrada, uma saída (SISO) e referência nula que apresentamos a seguir. O caso de sistemas com mais de uma entrada e saída (MIMO) e referência não nula serão tratados na sequência.

1.1 Referência nula: regulação

Perturbações estão presentes em todo sistema de controle e ao ocorrer elas forçam o sistema a sair do ponto de operação desejado. Um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se as variáveis de estado retornam assintoticamente ao ponto de equilíbrio depois de cessarem as perturbações. Para garantir a estabilidade de um certo ponto de equilíbrio, tipicamente linearizamos o sistema em torno do ponto de equilíbrio desejado e projetamos um controlador para estabilizar o sistema linearizado. É importante lembrar que se (x,u) representam o estado e controle do sistema linearizado e (h,v) o estado e controle do sistema não linear então temos as relações $x = h - \overline{h}$ e $u = v - \overline{v}$, isto é, o modelo linear descreve na realidade as variações do estado (h) e do controle (v) do sistema físico no entorno do ponto de equilíbrio desejado $(\overline{h}, \overline{v})$. Assim um controlador projetado para que o estado linear convirja para zero também faz com que o estado do sistema físico convirja para o ponto de equilíbrio desejado. O problema de determinar um controlador para que o estado do sistema linear convirja para zero é chamado de regulação e pode ser interpretado como um problema de controle onde a referência é nula. Este é o problema que iremos estudar nesta seção. Começaremos com o caso de sistema SISO e na sequência veremos o caso MIMO.

1.1.1 Método para sistemas SISO

Para o sistema da equação (1) com $u \in \mathbb{R}$, seja uma mudança de coordenadas $Tz(t) = x(t)$ tal que o sistema transformado se encontre na forma canônica de controlabilidade, ou seja:

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) \tag{6}$$

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \ , \quad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} M_{cc} &= \left[\begin{array}{cccc} B_c & A_c B_c & \cdots & A_c^{n-1} B_c \end{array}\right] \\ M_c &= \left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{n-1} B \end{array}\right] \end{aligned} \ , \quad T = M_c M_{cc}^{-1} \tag{8}$$

onde $\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ é o polinômio característico de malha aberta do sistema SISO em questão[1].

Supondo que os medidores nos fornecem em tempo real o vetor de estados $x(t)$, então conseguimos também obter o vetor de estados transformados $z(t)$. Logo, podemos implementar a lei de controle

$$u(t) = -K_c z(t) \ , \quad K_c = \left[\begin{array}{cccc} k_n & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{array}\right] \tag{9}$$

[1]Para obter a relação $T = M_c M_{cc}^{-1}$ basta substituir $A_c = T^{-1}AT$ e $B_c = T^{-1}B$ em M_{cc} que resulta $M_{cc} = T^{-1}M_c$.

O problema que devemos resolver agora é encontrar K_c de forma que o sistema em malha fechada dado por

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) = (A_c - B_c K_c) z(t) \tag{10}$$

seja estável.

Ora, a matriz $A_c - B_c K_c$ está na forma companheira:

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - k_n & -a_{n-1} - k_{n-1} & -a_{n-2} - k_{n-2} & \cdots & -a_1 - k_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

de onde obtemos a equação característica de malha fechada

$$\det\left(sI - (A_c - B_c K_c)\right) = s^n + (a_1 + k_1) s^{n-1} + \cdots + a_n + k_n = 0 \tag{12}$$

Como desejamos que o sistema seja estável em malha fechada e, ainda, atinja certas especificações de desempenho associadas aos polos desejados, queremos que os autovalores de malha fechada satisfaçam uma dada equação característica

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \tag{13}$$

Assim, das equações (12) e (13), temos que

$$a_i + k_i = \alpha_i \ , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{14}$$

Ou seja, o vetor de ganhos para o sistema na forma canônica controlável é

$$K_c = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \cdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Notemos, no entanto, que a lei de controle será implementada para o sistema original, e não para o sistema transformado. Como $u(t) = -K_c z(t) = -K x(t)$, temos que

$$K = K_c T^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \cdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} M_{cc} M_c^{-1} \tag{16}$$

É importante notar que para que possamos calcular a matriz de ganhos acima, que aloca os polos nas posições desejadas, é preciso que a matriz M_c seja inversível e isto ocorre se e somente se o sistema for controlável. Apesar da fórmula acima ser válida apenas para sistemas SISO, a controlabilidade ainda é requisito necessário e suficiente para alocação de polos no caso MIMO tratado a seguir.

1.1.2 Método para sistemas MIMO

Consideremos agora o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \ , \quad u(t) = -K x(t) \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^r \end{cases} \tag{17}$$

ou seja, $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$. Queremos encontrar a matriz de ganhos K de tal forma que os autovalores de $(A - BK)$ sejam $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Para isso, devemos ter

$$(A - BK)v_i = \lambda_i v_i \tag{18}$$

sendo λ_i autovalores e v_i seus respectivos autovetores. Podemos reescrever a condição acima na forma

$$(A - \lambda_i I)v_i - BKv_i = 0 \tag{19}$$

e finalmente reescrita como

$$M_i g_i = 0 \ , \qquad M_i = \left[\begin{array}{cc} A - \lambda_i I & -B \end{array} \right] \ , \qquad g_i = \left[\begin{array}{c} v_i \\ Kv_i \end{array} \right] \tag{20}$$

Observe que todos os elementos da matriz M_i são conhecidos e desejamos encontrar (v_i, K) que satisfazem a relação acima. Lembrando que espaço nulo da matriz M_i é o conjunto de todos os vetores $g_i \neq 0$ que satisfazem $M_i g_i = 0$, o problema a ser resolvido consiste em encontrar (v_i, K) tal que o vetor g_i pertença ao espaço nulo da matriz M_i para todo $i = 1, \ldots, n$.

Este problema pode ser facilmente resolvido pois uma base para o espaço nulo da matriz M_i, que chamaremos de Q_i, pode ser facilmente determinada[2]. Assim, qualquer vetor g_i obtido através da relação

$$g_i = Q_i f_i \tag{21}$$

é um elemento do espaço nulo de M_i. O vetor f_i pode ser arbitrariamente escolhido e representa uma combinação linear dos vetores da base, ou seja das colunas da matriz Q_i. Assim temos

$$\left[\begin{array}{cc} A - \lambda_i I & -B \end{array} \right] g_i = 0 \tag{22}$$

Fazendo esta operação para todo $i = 1, \ldots, n$, obtemos a igualdade

$$\left[\begin{array}{ccc} g_1 & \cdots & g_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \\ Kv_1 & \cdots & Kv_n \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+r)\times n} \tag{23}$$

Se particionarmos a matriz $\left[\begin{array}{ccc} g_1 & \cdots & g_n \end{array} \right]$ de acordo com os vetores v_i e Kv_i, obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc} g_1 & \cdots & g_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} V \\ G \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \\ Kv_1 & \cdots & Kv_n \end{array} \right] \ , \quad V = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{24}$$

$$G = \left[\begin{array}{ccc} Kv_1 & \cdots & Kv_n \end{array} \right] = K \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right] = KV \in \mathbb{R}^{r\times n} \tag{25}$$

Supondo V inversível, podemos obter a matriz de ganhos através da relação $K = GV^{-1}$.

Para que o método acima funcione a matriz V deve ser inversível. Se o sistema for controlável sempre podemos escolher vetores f_i em (21) tais que V seja inversível. Por exemplo podemos escolher f_i de forma aleatória ou ainda um vetor onde todas as componentes são unitárias.

---

[2]O conjunto de todos os vetores g_i tais que $M_i g_i = 0$ pode ser representado por $g_i = Q_i f_i$ onde Q_i é uma base qualquer do espaço nulo de M_i e f_i é qualquer vetor de dimensão igual ao número de colunas de Q_i. Uma base ortonormal Q_i pode ser obtida numericamente no Matlab com o comando `null`.

Note que nas expressões acima fica implícito que os autovalores desejados λ_i devem ser reais e distintos. Existem variações deste método que permitem λ_i complexos ou ainda reais repetidos. No Matlab podemos determinar a matriz de ganhos usando o comando `place` que funciona para polos reais ou complexos, repetidos ou não, e utiliza uma escolha dos vetores f_i já otimizada. Ver referências no manual do Matlab.

Exemplo 1. *Seja o sistema* $\dot{x} = Ax + Bu$, *com* $u = -Kx$ *e as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Queremos que os polos de malha fechada do sistema sejam $\{-1, -2\}$. *Calcularemos a matriz de ganho usando os métodos SISO e MIMO.*

Pelo método para sistemas SISO:

Equação característica de malha aberta:

$$det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \tag{27}$$

Equação característica desejada:

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \tag{28}$$

Usando o método visto anteriormente, temos:

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{29}$$

com $T = I$, *pois o sistema já está na forma canônica de controlabilidade.*

Pelo método para sistemas MIMO:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B \end{bmatrix} g_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & -1 \end{bmatrix} g_i = 0 \tag{30}$$

Os autovetores associados aos autovalores $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = -2$ *são* $g_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$ *e* $g_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}'$. *Desta forma, temos*

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} V \\ G \end{bmatrix} \tag{31}$$

Assim, $K = GV^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Referências

[1] Katsuhiko Ogata. *Engenharia de controle Moderno.* Prentice Hall, 2 edition, 1990.