Realimentação de saída

Prof. Tiago Dezuo

Descreve-se aqui uma solução para o problema de síntese de controladores via realimentação de saída através da abordagem LMI. Os resultados obtidos são semelhantes ao caso de síntese de controladores por realimentação de estados.

Considere o sistema linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das variáveis de saída mensuráveis e $u \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das variáveis de controle.

Uma condição necessária para que o problema de estabilização do sistema (1) por realimentação de saída tenha solução é que o par (A, B) seja estabilizável e o par (A, C) seja detectável [4]. O *survey* [3] é uma referência bastante completa sobre o problema de realimentação de saída.

1 Realimentação estática de saída

Esta é a forma mais simples de projeto de controladores por realimentação de saída e consiste em encontrar uma matriz de ganho K tal que a lei de controle do tipo $u = Ky$ estabilize o sistema (1), ou satisfaça outros requisitos de projeto. Neste caso, o sistema em malha fechada se torna

$$\dot{x} = (A + BKC)\, x. \tag{2}$$

Para que este sistema seja quadraticamente estável, ele tem que satisfazer as condições de Lyapunov. Isso implica em que devem existir matrizes $P > 0$ e K tais que $v(x) = x'Px > 0$ e

$$\dot{v}(x) = x' \left(A'P + PA + C'K'B'P + PBKC\right) x < 0. \tag{3}$$

Note que a condição anterior não é convexa nas variáveis (P, K), o que impossibilita a utilização dos pacotes computacionais existentes. Para contornar este problema, utiliza-se aqui o Problema-P, dado em [1], que cria um problema auxiliar convexo que se for factível então o problema original também será.

Usando as condições do Problema-P, obtém-se as condições dadas pelo Teorema 1 a seguir.

Teorema 1. *O sistema (1) será quadraticamente estabilizável por uma lei de controle do tipo $u = Ky$ se existem matrizes $P > 0$, M e Y tais que*

$$\begin{aligned} &A'P + PA + C'Y'B' + BYC < 0, \\ &PB = BM. \end{aligned} \tag{4}$$

Em caso afirmativo, o ganho de realimentação é dado por $K = M^{-1}Y$ e $v(x) = x'Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema. ■

Prova. *Suponha que as condições do Teorema 1 estejam satisfeitas. Como $PB = BM$ e $K = M^{-1}Y$, a primeira LMI em (4) se torna*

$$A'P + PA + C'K'B'P + PBKC < 0. \tag{5}$$

Pré e pós multiplicando por x' e x, respectivamente, tem-se

$$x'\left(A'P + PA + C'K'B'P + PBKC\right)x < 0, \tag{6}$$

o que prova o teorema, pois é a condição para $\dot{v}(x) < 0$. ■

Pode-se ainda considerar uma abordagem dual. Este resultado é apresentado a seguir e utiliza a versão dual do Problema-P, o Problema-W dado em [1].

Teorema 2. *O sistema (1) será quadraticamente estabilizável por uma lei de controle do tipo $u = Ky$ se existem matrizes $Q > 0$, M e Y tais que*

$$\begin{aligned} &QA' + AQ + C'Y'B' + BYC < 0, \\ &CQ = MC. \end{aligned} \tag{7}$$

Em caso afirmativo, o ganho de realimentação é dado por $K = YM^{-1}$ e $v(x) = x'Px$, com $P = Q^{-1}$, é uma função de Lyapunov para o sistema. ■

O grande problema que surge é que as condições acima são apenas suficientes para a solução do problema, ou seja, se houver solução então o problema original estará satisfeito, porém, o contrário geralmente não ocorre. Em [1], os autores mostram que a factibilidade do Problema-P ou do Problema-W é dependente da representação de estados, assim, é possível através da aplicação de uma transformação de similaridade tornar o problema factível. No entanto, como encontrar esta transformação é um problema não convexo de difícil solução. Uma alternativa seria utilizar os testes de estabilidade do par (A, B) e de detectabilidade do par (A, C), como realizado em [2].

É possível estender os resultados de síntese para sistemas incertos com incertezas na forma politópica de forma semelhante ao caso de realimentação de estados. Para tal, resolve-se as LMIs em (4) ou em (7) para os vértices. Note que as matrizes C e B não podem ser incertas conjuntamente, pois torna o problema não convexo. Por isso, devido à restrição de igualdade, é mais conveniente no caso primal que apenas a matriz C seja incerta e no caso dual que apenas a matriz B seja incerta.

Exemplo 1. *Dado o sistema*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

deseja-se encontrar uma matriz de ganho K tal que a lei de controle $u = Ky$ estabilize o sistema. Utilizando a abordagem primal dada no Teorema 1 não é possível obter uma solução factível, mas isso não implica que o problema não tenha solução, pois as condições apresentadas são apenas suficientes. Aplicando-se a abordagem dual do Teorema 2, obtém-se M, Q e Y. Por fim, pode-se calcular a matriz de ganhos $K = YM^{-1}$ que estabiliza o sistema em malha fechada. ■

2 Realimentação dinâmica de saída

Em alguns casos, com apenas um ganho não é possível satisfazer todos os requisitos de performance pré-especificados em um projeto de controle. É necessário, muitas vezes, que o controlador tenha o comportamento de um sistema dinâmico. Considerando que a dinâmica do controlador esteja na forma de representação de estados, é possível em muitos casos incorporar o controlador ao sistema, transformando o problema de realimentação dinâmica de saída em um problema de realimentação estática de dimensão aumentada.

Seja o sistema 1 e a dinâmica do controlador dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \tag{9}$$

onde $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ é o vetor de estados do controlador e $n_c \leq n$ caracteriza a ordem deste.

Realimentando o sistema (1) com o controlador dado em 9, obtém-se o sistema de malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BD_cC)x + BC_c x_c \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c C x \end{aligned} \tag{10}$$

que pode ser reescrito como um sistema aumentado da forma

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a K_a C_a x_a \tag{11}$$

com $x_a := [x' \; x_c']'$ representando o novo vetor de estados e as matrizes dadas por

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad K_a = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}. \tag{12}$$

O problema agora é o de síntese de controladores via realimentação estática de saída, ou seja, encontrar uma lei de controle do tipo $u = K_a y_a$ com $y_a = C_a x_a$, tal que o sistema seja quadraticamente estável. Para solucionar este problema basta resolver as LMIs dos Teoremas 4 ou 7 para o sistema (11).

Mas nem sempre é necessário que o controlador tenha a ordem do sistema, ou seja $n_c = n$. Controladores que têm a dimensão menor que a do sistema, $n_c < n$, são chamados de controladores de ordem reduzida. A solução do problema é realizada da mesma maneira, mas tem-se agora o sistema aumentado de ordem menor, bem como a matriz de ganhos K_a.

Referências

[1] C. A. R. Crusius and A. Trofino. Sufficient lmi conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1053–1057, May 1999.

[2] F. Scavone, A. Silva, A. Trofino, and J. M. Campagnolo. Projeto robusto de controladores para sistemas de potência usando técnicas lmi. In *XII Congresso Brasileiro de Automática*, 1998.

[3] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback—a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, 1997.

[4] L. Vandenberghe and S. Boyd. A primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities. *Mathematical Programming*, 69(1):205–236, Julho 1995.